Formeel Denken 2006
Uitwerkingen Inhaaltoets

1. Nee, dat is niet zo. Neem $f := a$ en $g := \neg a$, dan zijn $\models f$ en $\models g$ tegelijk onwaar, maar geldt $\models f \leftrightarrow g$ niet. (In elke kolom van onderstaande waarheidstabel staat een 0, dus geen van de drie formules is logisch waar.)

f	g	$f \leftrightarrow g$
a	$\neg a$	$a \leftrightarrow \neg a$
0	1	0
1	0	0

   Dus de 'dan en slechts dan' geldt niet van rechts naar links.

2. $$\forall x \in V \forall y \in M\big([\exists z \in (M \cup V)\forall z' \in (M \cup V)(H(x,z') \leftrightarrow z' = z)] \wedge \\ H(x,y) \to [\exists w \in (M \cup V)\forall w' \in (M \cup V)(H(y,w') \leftrightarrow w' = w)]\big)$$

   Dit is de interpretatie 'de man waar een monogame vrouw van houdt is monogaam'. De alternatieve interpretatie 'een monogame vrouw houdt van alle monogame mannen' is niet zinnig (want dan zou ze niet monogaam zijn!)

3. Laat $P(w)$:= 'w heeft óf de vorm uSv, óf de vorm uv, waarbij $u, v \in \{a,b\}^*$, en v gelijk aan u^R met alle a's vervangen door b's en vice versa'.

   We controleren nu de drie eigenschappen die nodig zijn om hiermee te bewijzen dat *abaabb* niet wordt geproduceerd door de grammatica:

   - $P(S)$ geldt, want S is van de vorm uSv met $u = v = \lambda$.
   - P is inderdaad een invariant: als $P(w)$, en we vervangen in w de S (die dan dus in het midden moet staan) door één van de drie mogelijkheden in de grammatica met als resultaat w', dan geldt duidelijk ook dat $P(w')$.

     (In de eerste twee gevallen worden u en v allebei één langer, op een manier die de relatie tussen u en v in stand houdt, en in het derde geval gaat w van de vorm uSv naar de vorm uv.)
   - $P(abaabb)$ geldt niet. De enige manier om *abaabb* te schrijven in de vorm uv met u en v even lang is $u = aba$ en $v = abb$, en dan is $u^R = aba$, maar met a's en b's omwisseld wordt dit *bab*, en dat is ongelijk aan $v = abb$.

4. We bewijzen dit met inductie naar n. De inductie loopt over de getallen $n \geq 1$, omdat het over niet-lege bomen gaat die dus minstens één punt hebben.

- De basisstap is $n = 1$. In dat geval gaat het over een graaf met één punt, en dus met nul lijnen (want voor een lijn heb je twee punten nodig), en inderdaad is $1 - 1 = 0$.
- Inductiestap: we nemen aan als inductiehypothese dat de te bewijzen eigenschap geldt voor $n = m$, en we moeten daaruit laten zien dat het ook geldt voor $n = m + 1$.

  Bekijk dus een boom G met $m + 1$ punten. We moeten laten zien dat deze boom $(m + 1) - 1 = m$ lijnen heeft.

  We mogen van de opgave gebruiken dat minstens één punt in G graad 1 heeft. Kies zo'n punt x, en verwijder dit punt met zijn bijbehorende lijn uit G. Dit geeft een graaf G'.

  Dan is G' ook een boom. Om dit in te zien moeten we twee dingen controleren:

  - G' is samenhangend: voor iedere twee punten in G' moeten we laten zien dat er tussen deze twee punten een pad is. Omdat G een boom is, en dus samenhangend, is er een pad tussen deze twee punten in G. Maar dit pad kan x niet bevatten (want dan zou x minstens graad 2 moeten hebben gehad), dus is het ook al een pad in G'.
  - G' bevat geen cykel. Want stel dat dat wel zo was, dan was dit ook een cykel in G geweest (G' is een deelgraaf van G), en G is een boom en heeft dus geen cykels: dus dat kan niet.

  G' is dus een boom, en G' heeft m punten (één minder dan G), en dus heeft G' volgens de inductiehypothese $m - 1$ lijnen. Maar we hebben precies één lijn weggelaten om G' uit G te krijgen, en dus had G oorspronkelijk m lijnen. En dat was wat we moesten laten zien.

(Het sub-bewijs dat G' ook een boom is, is niet nodig om de 18 punten voor deze opgave te krijgen: dat mag je voor zich laten spreken. Het staat er alleen voor de volledigheid bij.)

5. Het bewijs gaat in vijf stappen. Laat L de taal $\mathcal{L}(r)$ zijn.

- Bij de reguliere expressie r bestaat er een rechts-lineaire contextvrije grammatica G die ook de taal L beschrijft (stelling 3.25 op blz. 28).
- Bij deze grammatica G is er een deterministische eindige automaat $M = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ die precies L herkent (stelling 5.9 op blz. 52).
- Laat $M' = \langle \Sigma, Q, q_0, Q \backslash F, \delta \rangle$ de deterministische eindige automaat zijn die je uit M krijgt door de eindtoestanden en niet-eindtoestanden om te wisselen. Deze automaat herkent het complement $\overline{L}$ van de taal L.
- Bij deze machine M' is er een rechts-lineaire contextvrije grammatica G' die het complement $\overline{L}$ beschrijft (stelling 5.6 op blz. 50).

- En bij deze grammatica G' is er een reguliere expressie r' die ook het complement $\overline{L}$ beschrijft (stelling 3.25 op blz. 28). Dit is de r' die we zoeken.

(De nummers van de stellingen hoef je natuurlijk niet bij het antwoord op deze opgave te geven, want wie onthoudt er zoiets? Ze staan er alleen maar voor het gemak bij het nazoeken in de syllabus bij.)