# Formeel Denken 2007
# Uitwerkingen Toets 3: Talen

1.
$$L_1 = \mathcal{L}\big((a \cup b)^*\, ab\, (a \cup b)^*\big)$$

2.
$$\begin{aligned} S &\to aS \mid bS \mid abA \\ A &\to aA \mid bA \mid \lambda \end{aligned}$$

3. Als we nul of meer keren een element van $L_1$ achter elkaar plakken, dan zijn er twee mogelijkheden:
   - Of we hebben nul keer een element van $L_1$. In dat geval hebben we het woord $\lambda$.
   - Of we hebben één of meer keren een element van $L_1$. Maar in dit geval bevat het woord zeker het deelwoord $ab$, dus zijn dit precies de woorden in $L_1$.

4. Ja, want $L_1$ is regulier, en reguliere talen zijn gesloten onder reversal, complementatie en intersectie.

   In feite is dit de taal van de woorden die zowel geen $ab$ als geen $ba$ bevatten, dus die óf alleen $a$'s, óf alleen $b$'s bevatten (want anders moeten de $a$'s en de $b$'s elkaar ergens ontmoeten). Een reguliere expressie voor deze taal is dus
$$\overline{L_1} \cap \overline{L_1}^R = \mathcal{L}\big(a^* \cup b^*\big)$$

5.
$$G = \langle \{a, b\}, \{S\}, \{S \to a,\ S \to Sb\} \rangle$$

6.
$$S \to Sb \to Sbb \to abb$$

7. Ja, want
$$L_2 = \mathcal{L}\big(ab^*\big)$$

8. We hebben
$$aS \to aa$$
   Nu geldt $P(aS)$ wel, maar $P(aa)$ geldt niet, dus is $P$ niet invariant.

9.
$$P'(w) := w \text{ bevat precies één element uit } \{S, a\}$$
   $P'$ is een invariant die laat zien dat $aab \notin L_2$:

- $P'(S)$ geldt, want $S$ bevat precies één element uit $\{S, a\}$.
- Als $w$ precies één element uit $\{S, a\}$ bevat, en we vervangen in $w$ $S$ door hetzij $a$, hetzij $Sb$, dan blijft dit duidelijk het geval.
- $P'(aab)$ geldt niet, want $aab$ bevat *twee* elementen uit $\{S, a\}$.