

**Formeel Denken 2013**  
**Tentamen**  
(29/01/14)

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn vijftien opgaven, die ieder zes punten waard zijn. Het cijfer voor dit tentamen is het aantal punten gedeeld door tien, en de eerste tien punten zijn gratis. Veel succes!

1. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk (6 punten) door een formule van de propositielogica:

*Het is koud, maar er ligt geen ijs, want het vriest niet.*

Gebruik hierbij als woordenboek:

$K$  het is koud  
 $V$  het vriest  
 $Y$  er ligt ijs

2. (a) Schrijf de formule van de propositielogica (3 punten)

$$((a \rightarrow \neg a \wedge a) \rightarrow \neg a \wedge a) \rightarrow a$$

volgens de officiële grammatica uit de syllabus.

- (b) Geef de waarheidstabel van deze formule. (3 punten)

3. Geldt voor iedere formule  $f$  van de propositielogica waarin  $a$  de enige atomaire propositie is dat  $f \equiv a$ ,  $f \equiv \neg a$ ,  $f \equiv a \vee \neg a$  of  $f \equiv a \wedge \neg a$ ? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef zo'n formule  $f$  die niet logisch equivalent is aan één van deze vier formules. (6 punten)

4. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk (6 punten) door een formule van de predikaatlogica:

*In geen van de provincies die aan Utrecht grenzen sneeuwt het.*

Gebruik hierbij als woordenboek:

$P$  het domein van de provincies  
 $u$  Utrecht  
 $S(x)$  het sneeuwt in provincie  $x$   
 $G(x, y)$  provincies  $x$  en  $y$  grenzen aan elkaar

5. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica met gelijkheid: (6 punten)

*Het sneeuwt in precies twee provincies.*

Gebruik hierbij het woordenboek uit de vorige opgave.

6. Geef een interpretatie  $I$  in een model  $M$  zodat (6 punten)

$$(M, I) \not\models \exists x, y \in D R(x, y) \rightarrow \exists x, y, z \in D (R(x, y) \wedge R(y, z))$$

7. Geldt voor iedere taal  $L$  dat als  $a \notin L$ , dat dan ook  $a \notin L^*$ ? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een taal  $L$  die hier een tegenvoorbeeld tegen is. (6 punten)

8. Gegeven de taal

$$L_8 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een oneven aantal } a\text{'s}\}$$

- (a) Geef een reguliere expressie voor deze taal. (3 punten)  
 (b) Geef een eindige automaat die dezelfde taal herkent. (3 punten)

9. Gegeven de grammatica  $G_9$  met als regels:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow BaA \\ A &\rightarrow BaS \mid B \\ B &\rightarrow bB \mid \lambda \end{aligned}$$

- (a) Is deze grammatica rechtslineair? (2 punten)  
 (b) Geef een invariant die laat zien dat  $\lambda \notin \mathcal{L}(G_9)$ . Verklaar je antwoord. (4 punten)
10. (a) Geef acht grafen  $G_1$  tot en met  $G_8$  met ieder vier punten die allemaal onderling niet isomorf zijn (het maximaal aantal grafen met vier punten die allemaal onderling niet isomorf zijn is elf). (2 punten)  
 (b) Geef voor ieder van deze grafen zonder verdere toelichting aan: (4 punten)
- of de graaf een boom is
  - of de graaf een Euler-pad heeft
  - of de graaf een Hamilton-pad heeft
  - of de graaf planair is
  - wat het kleurgetal van de graaf is

11. We willen een rij  $a_n$  definiëren zodat

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

Hiertoe gebruiken we de recursieve definitie

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + (2(n+1) - 1) \quad \text{voor } n \geq 1$$

- (a) Reken  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  en  $a_4$  uit met deze recursieve definitie. (2 punten)  
(b) Bewijs met inductie dat (4 punten)

$$a_n = n^2$$

voor alle  $n \geq 1$ .

12. Iemand wil deze week drie avonden naar de sportschool. De week loopt van maandag tot en met zondag, en deze persoon vindt het niet erg om op zaterdag of zondag te sporten.

- (a) Bereken op hoeveel manieren hij de avonden om naar de sportschool te gaan kan kiezen. (3 punten)  
(b) Geef aan waar dit getal te vinden is in de driehoek van Pascal. (3 punten)

13. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de epistemische logica: (6 punten)

*Ik weet dat als het niet goed is, dat ik dan niet weet dat het niet goed is, maar ik weet niet óf het niet goed is.*

Gebruik hierbij als woordenboek:

$G$  het is goed

14. Geef een Kripke-model  $\mathcal{M}$ , met (6 punten)

$$\mathcal{M} \models \diamond \Box a$$

maar

$$\mathcal{M} \not\models \Box a$$

Verklaar je antwoord.

15. (a) Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een LTL formule: (3 punten)

*De kruik gaat zolang te water tot ze barst.*

Interpreteer deze zin als te zeggen dat er een moment zal komen waarop de kruik barst, dat vanaf dat moment de kruik niet meer te water gaat (want die is dan kapot), maar tot dat moment wel.

Gebruik hierbij als woordenboek:

$b$  de kruik barst

$w$  de kruik gaat te water

- (b) Geef een LTL model waarin deze formule niet waar is. (3 punten)