Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Tentamen
(29/01/14)

1. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de propositielogica: (6 punten)

   Het is koud, maar er ligt geen ijs, want het vriest niet.

   Gebruik hierbij als woordenboek:

K	het is koud
V	het vriest
Y	er ligt ijs

   $$K \wedge \neg Y \wedge \neg V$$

   Merk op dat 'maar' en 'want' hier de rol van 'en' spelen. Alledrie de delen zijn namelijk onvoorwaardelijk waar.

2. (a) Schrijf de formule van de propositielogica (3 punten)

   $$((a \to \neg a \wedge a) \to \neg a \wedge a) \to a$$

   volgens de officiële grammatica uit de syllabus.

   $$(((a \to (\neg a \wedge a)) \to (\neg a \wedge a)) \to a)$$

   (b) Geef de waarheidstabel van deze formule. (3 punten)

a	$\neg a$	$(\neg a \wedge a)$	$(a \to (\neg a \wedge a))$	$((a \to (\neg a \wedge a)) \to (\neg a \wedge a))$	$(((a \to (\neg a \wedge a)) \to (\neg a \wedge a)) \to a)$
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1

3. Geldt voor iedere formule f van de propositielogica waarin a de enige atomaire propositie is dat $f \equiv a$, $f \equiv \neg a$, $f \equiv a \vee \neg a$ of $f \equiv a \wedge \neg a$? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef zo'n formule f die niet logisch equivalent is aan één van deze vier formules. (6 punten)

   Als f een formule in de propositielogica is met als enige atomaire propositie een a, dan heeft de waarheidsabel van f maar twee regels. Dit betekent automatisch dat er slechts vier verschillende mogelijkheden zijn voor de waarheidstabel van f:

a	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

   En voor deze formules geldt: $f_1 \equiv a \wedge \neg a$, $f_2 \equiv a$, $f_3 \equiv \neg a$ en $f_4 \equiv a \vee \neg a$. Dus de bewering geldt.

4. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica: (6 punten)

In geen van de provincies die aan Utrecht grenzen sneeuwt het.

Gebruik hierbij als woordenboek:

P	het domein van de provincies
u	Utrecht
$S(x)$	het sneeuwt in provincie x
$G(x,y)$	provincies x en y grenzen aan elkaar

De zin 'In geen van de provincies die aan Utrecht grenzen sneeuwt het.' betekent hetzelfde als 'Er is geen provincie die aan Utrecht grenst waar het sneeuwt.' of als 'In alle provincies die aan Utrecht grenzen sneeuwt het niet.'. Dit levert de volgende twee formules:

$$\forall p \in P\ (G(p,u) \to \neg S(p))$$

$$\neg \exists p \in P\ (G(p,u) \wedge S(p))$$

5. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica met gelijkheid: (6 punten)

Het sneeuwt in precies twee provincies.

Gebruik hierbij het woordenboek uit de vorige opgave.

$$\exists x,y \in P\ ((x \neq y) \wedge S(x) \wedge S(y) \wedge \forall z \in P\ (S(z) \to ((z = x) \vee (z = y)))$$

6. Geef een interpretatie I in een model M zodat (6 punten)

$$(M,I) \not\models \exists x,y \in D\, R(x,y) \to \exists x,y,z \in D(R(x,y) \wedge R(y,z))$$

Er wordt gevraagd om een M en I zodat de formule onwaar is in dat model en onder die interpretatie. De formule is een implicatie; die is dus alleen maar onwaar als wat voor de $\to$ waar is en wat er na staat onwaar is. Dus we zoeken een domein D waarin we twee (mogelijk verschillende) elementen kunnen kiezen die met elkaar in relatie staan, maar waarbij het niet lukt om nog een (mogelijk verschillend) derde element te kiezen dat met beide eerste elementen in relatie staat. Neem bijvoorbeeld:

Model M

Domein(en)	$\{0,1\}$
Relatie(s)	is kleiner dan

Interpretatie I

D	$\{0,1\}$
$R(x,y)$	$x < y$

Het is duidelijk dat het deel voor de $\rightarrow$ waar is, want neem $x = 0$ en $y = 1$, dan geldt $R(x, y)$. Maar na de $\rightarrow$ moeten we drie elementen kiezen met $x < y$ en $y < z$. Maar als $x = 0$ dan moet $y = 1$ om $x < y$ waar te laten zijn en dan is er geen z meer met $y < z$. En als $x = 1$ is er sowieso geen y meer met $x < y$. Dus het deel van de formule na de $\rightarrow$ is onwaar.

7. Geldt voor iedere taal L dat als $a \notin L$, dat dan ook $a \notin L^*$? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een taal L die hier een tegenvoorbeeld tegen is. (6 punten)

   Ja, dit geldt voor elke taal L. De taal L^* bestaat uit eindig veel concatenaties van woorden uit L. Als $a \in L^*$ dan is er dus een $k \in \mathbb{N}$ met $w_1 \dots w_k = a$ en $w_i \in L$. Maar omdat de totale lengte van a precies 1 is, moet er precies één i zijn met $w_i = a$ en voor alle $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ geldt $w_j = \lambda$. Maar in het bijzonder geldt dus $a = w_i \in L$. Dus als $a \notin L$, dan ook $a \notin L^*$.

8. Gegeven de taal

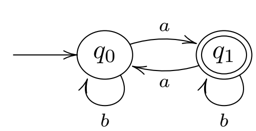
$$L_8 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een oneven aantal } a\text{'s}\}$$

   (a) Geef een reguliere expressie voor deze taal. (3 punten)

   Een woord uit L_8 bevat altijd een eerste a. Die kan natuurlijk omgeven zijn door willekeurige hoeveelheden b's. Daarna moet er nog willekeurig veel blokken komen met elk precies twee a's en willekeurige aantallen b's er om heen.

$$b^*ab^*(b^*ab^*ab^*)^* \quad \text{of} \quad b^*ab^*(ab^*ab^*)^* \quad \text{of} \quad b^*a(b^*ab^*ab^*)^*$$

   (b) Geef een eindige automaat die dezelfde taal herkent. (3 punten)



9. Gegeven de grammatica G_9 met als regels:

$$S \rightarrow BaA$$
$$A \rightarrow BaS \mid B$$
$$B \rightarrow bB \mid \lambda$$

   (a) Is deze grammatica rechtslineair? (2 punten)

   Nee, deze grammatica is niet rechtslineair. In de regel $S \rightarrow BaA$ staat het hulpsymbool B niet helemaal rechts.

(b) Geef een invariant die laat zien dat $\lambda \notin \mathcal{L}(G_9)$. Verklaar je antwoord. (4 punten)

Definieer:

$$P(w) \quad := \quad w \text{ bevat een } S \text{ of een } a$$

Dit is een invariant want:

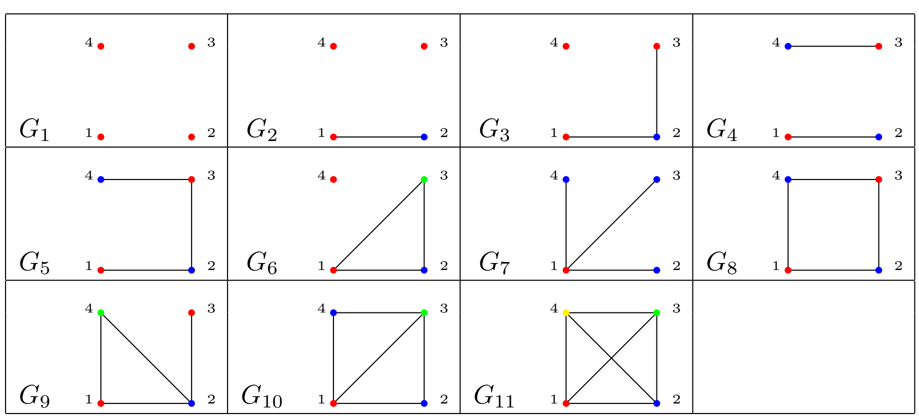
- $P(S)$ geldt want S bevat een S of een a.
- Zij v en v' zodanig dat $P(v)$ en $v \to v'$. Uit $P(v)$ volgt dat v een S of een a bevat.
  - Stel v bevat een S. Dan kunnen er bij $v \to v'$ twee dingen gebeuren.
    * Ofwel wordt de regel $S \to BaA$ uitgevoerd en dan weten we zeker dat v' een a bevat en dat dus $P(v')$ geldt.
    * Ofwel wordt er een andere regel uitgevoerd en blijft die S dus ook in v' staan en dus ook dan geldt $P(v')$.

    Dus in beide gevallen geldt $P(v')$.
  - Stel v bevat een a. Dan maakt het niet uit welke regel bij $v \to v'$ wordt toegepast, want die a kan niet verdwijnen. Dus geldt zeker $P(v')$.

  Dus geldt in alle gevallen $P(v')$.

Tevens is het duidelijk dat $P(\lambda)$ niet geldt, dus $\lambda \notin \mathcal{L}(G_9)$.

10. (a) Geef acht grafen G_1 tot en met G_8 met ieder vier punten die allemaal onderling niet isomorf zijn (het maximaal aantal grafen met vier punten die allemaal onderling niet isomorf zijn is elf). (2 punten)



(b) Geef voor ieder van deze grafen zonder verdere toelichting aan: (4 punten)

- of de graaf een boom is
- of de graaf een Euler-pad heeft
- of de graaf een Hamilton-pad heeft
- of de graaf planair is

- wat het kleurgetal van de graaf is

Eigenschap	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}
boom	nee	nee	nee	nee	ja	nee	ja	nee	nee	nee	nee
Euler-pad	nee	ja	ja	nee	ja	ja	nee	ja	ja	ja	nee
Hamilton-pad	nee	nee	nee	nee	ja	nee	nee	ja	ja	ja	ja
planair	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja
kleurgetal	1	2	2	2	2	3	2	2	3	3	4

11. We willen een rij a_n definiëren zodat

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

Hiertoe gebruiken we de recursieve definitie

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + (2(n+1) - 1) \quad \text{voor } n \geq 1 \end{aligned}$$

(a) Reken a_1, a_2, a_3 en a_4 uit met deze recursieve definitie. (2 punten)

$$\begin{array}{lllllll} a_1 & = & 1 & & & & \\ a_2 & = & a_1 + (2 \cdot (1+1) - 1) & = & 1 + 3 & = & 4 \\ a_3 & = & a_2 + (2 \cdot (2+1) - 1) & = & 4 + 5 & = & 9 \\ a_4 & = & a_3 + (2 \cdot (3+1) - 1) & = & 9 + 7 & = & 16 \end{array}$$

(b) Bewijs met inductie dat (4 punten)

$$a_n = n^2$$

voor alle $n \geq 1$.

Propositie:

$a_n = n^2$ voor alle $n \geq 1$ 0

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad a_n = n^2$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(1)$ geldt, ofwel 3
$a_1 = 1^2$

Dit is zo, want $a_1 = 1 = 1^2$. 4

Inductiestap. Laat n een willekeurig getal zijn met $n \geq 1$ 5

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel 6
$a_n = n^2$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(n+1)$ ook geldt, ofwel 7
$a_{(n+1)} = (n+1)^2$

Dit is zo, want 8

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (2 \cdot (n+1) - 1) \\ &\overset{\text{IH}}{=} n^2 + (2 \cdot (n+1) - 1) \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 1$ 9

12. Iemand wil deze week drie avonden naar de sportschool. De week loopt van maandag tot en met zondag, en deze persoon vindt het niet erg om op zaterdag of zondag te sporten.

(a) Bereken op hoeveel manieren hij de avonden om naar de sportschool te gaan kan kiezen. (3 punten)

Eigenlijk staat er in de tekst dus dat er geen beperkingen op de zeven dagen van de week zijn. Dus er moeten ongeordend drie van de zeven objecten gekozen worden. Dat kan op $\binom{7}{3} = 35$ manieren.

(b) Geef aan waar dit getal te vinden is in de driehoek van Pascal. (3 punten)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} &&&&&&&1&&&&&&& \\ &&&&&&1&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&2&&1&&&&& \\ &&&&1&&3&&3&&1&&&& \\ &&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\ &&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\ &1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\ 1&&7&&21&&\boxed{35}&&35&&21&&7&&1 \end{array}$$

13. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de epistemische logica: (6 punten)

Ik weet dat als het niet goed is, dat ik dan niet weet dat het niet goed is, maar ik weet niet óf het niet goed is.

Gebruik hierbij als woordenboek:

G het is goed

Er staat dus eigenlijk 'Ik weet dat als het niet goed is ik niet weet dat het niet goed is en ik weet niet dat het goed is en ik weet ook niet dat het niet goed is.'

$$\Box(\neg G \to \neg\Box\neg G) \wedge \neg\Box G \wedge \neg\Box\neg G$$

$$\Box(\neg G \to \neg\Box\neg G) \wedge \neg(\Box G \vee \Box\neg G)$$

$$\Box(\neg G \to \neg\Box\neg G) \wedge \Diamond\neg G \wedge \Diamond G$$

$$\Box(\neg G \to \Diamond G) \wedge \Diamond\neg G \wedge \Diamond G$$

14. Geef een Kripke-model $\mathcal{M}$, met (6 punten)

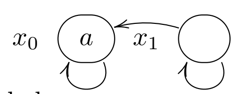
$$\mathcal{M} \models \Diamond\Box a$$

maar

$$\mathcal{M} \not\models \Box a$$

Verklaar je antwoord.

Neem het Kripke model $\mathcal{M}$:



Bekijk nu de volgende tabel.

$\Vdash$	a	$\Box a$	$\Diamond\Box a$
x_0	1	1	1
x_1	0	0	1

Omdat $x_0 \Vdash \Diamond\Box a$ en $x_1 \Vdash \Diamond\Box a$, geldt $\mathcal{M} \models \Diamond\Box a$. En omdat $x_1 \nVdash \Box a$, geldt $\mathcal{M} \not\models \Box a$.

15. (a) Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een LTL formule: (3 punten)

De kruik gaat zolang te water tot ze barst.

Interpreteer deze zin als te zeggen dat er een moment zal komen waarop de kruik barst, dat vanaf dat moment de kruik niet meer te water gaat (want die is dan kapot), maar tot dat moment wel.

Gebruik hierbij als woordenboek:

b	de kruik barst
w	de kruik gaat te water

$$(w \wedge \neg b)\mathcal{U}(b \wedge \mathcal{G}\neg w)$$

Merk op dat $w\mathcal{U}b$ niet goed is, want dat sluit niet uit dat de kruik ook nog te water gaat op het moment dat hij barst. De $\neg b$ vooraan is nodig om af te dwingen dat het barsten maar één keer kan gebeuren.

(b) Geef een LTL model waarin deze formule niet waar is. (3 punten)

Neem het model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ met

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ R(x_i) & = & \{x_j \mid i \leq j\} \\ V(x_i) & = & \{w\} \text{ als } i < 5 \\ V(x_5) & = & \{b, w\} \\ V(x_i) & = & \emptyset \text{ als } i > 5 \end{array}$$

De formule $(w \wedge \neg b)\mathcal{U}(b \wedge \mathcal{G}\neg w)$ zijn niet waar in dit model omdat de kruik nu te water gaat tot en met dat hij barst. De formule $w\mathcal{U}b$ is wel waar.