Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Toets 1: Propositielogica
(16/09/13)

In de eerste twee opgaven gebruiken we de volgende interpretatie voor de atomaire proposities:

A	Amerika gaat oorlog voeren in Syrië
R	Rusland bedrijft diplomatie
S	Syrië wordt onder internationaal toezicht gesteld

1. Geef formules van de propositielogica die de volgende zinnen in betekenis zo goed mogelijk benaderen:

   (a) *Syrië wordt alleen onder internationaal toezicht gesteld als Rusland diplomatie bedrijft.*

   $$S \to R$$

   (Dat dit geen equivalentie moet zijn kun je inzien door na te denken over de verwante zin 'ik word alleen nat als het regent'. Die betekent niet dat als het regent je ook noodzakelijkerwijs nat wordt. Dit is nog duidelijker als je daar 'ik word alleen *maar* nat als het regent' van maakt.)

   (b) *Ook als Rusland diplomatie bedrijft gaat Amerika oorlog voeren in Syrië, tenzij Syrië onder internationaal toezicht wordt gesteld.*

   $$(\neg R \to A) \wedge (R \to (\neg S \leftrightarrow A))$$

   Andere uitwerkingen zijn ook goed verdedigbaar:

   $$(\neg R \to A) \wedge (R \to (\neg S \to A))$$

   $$\neg S \leftrightarrow A$$

   of zelfs

   $$\neg S \to A$$

   (10 + 10 punten)

2. Geef een Nederlandse zin die de betekenis van de volgende formule zo goed mogelijk benadert:

   $$(R \vee A) \wedge (\neg S \leftrightarrow A)$$

   (10 punten)

   Rusland bedrijft diplomatie, of Amerika gaat oorlog voeren in Syrië, of allebei, en verder wordt Syrië niet onder internationaal toezicht gesteld precies dan als Amerika oorlog gaat voeren in Syrië.

3. Schrijf de formule

$$a \leftrightarrow \neg b \wedge a \leftrightarrow \neg\neg c$$

met haakjes volgens de officiële grammatica uit de syllabus en geef de waarheidstabel. (20 punten)

$$(a \leftrightarrow ((\neg b \wedge a) \leftrightarrow \neg\neg c))$$

a	b	c	$\neg b$	$\neg c$	$\neg\neg c$	$(\neg b \wedge a)$	$((\neg b \wedge a) \leftrightarrow \neg\neg c)$	$(a \leftrightarrow ((\neg b \wedge a) \leftrightarrow \neg\neg c))$
0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0

4. Welke van de volgende drie uitspraken gelden voor alle formules f en g:

   (a) Als $\models f$ en $\models g$, dan $f \equiv g$.

   Deze bewering geldt voor alle f en g. Uit $\models f$ volgt dat voor elk model v geldt dat $v(f) = 1$. En uit $\models g$ volgt dat voor elk model v geldt dat $v(g) = 1$. Maar dan geldt ook voor elk model v dat $v(f) = v(g)$. En dus geldt $f \equiv g$.

   (b) Als $f \models g$, dan $\models g$.

   Deze bewering geldt niet voor alle f en g. Neem maar $f = a$ en $g = a$. Dan krijgen we de volgende waarheidstabel:

a	f	g
0	0	0
1	1	1

   Omdat bij elk model v met $v(f) = 1$ geldt dat ook $v(g) = 1$, geldt $f \models g$. Echter omdat er een model v is met $v(g) = 0$ geldt $\models g$ duidelijk niet.

   (c) Als $f \models g$ en $\neg f \models g$, dan $\models g$.

   Deze bewering geldt voor alle f en g. Uit $f \models g$ volgt dat voor elk model v met $v(f) = 1$ geldt dat $v(g) = 1$. En uit $\neg f \models g$ volgt dat voor elk model v met $v(\neg f) = 1$ geldt dat $v(g) = 1$. Maar dat betekent dat voor elk model v met $v(f) = 0$ geldt dat $v(g) = 1$. Met andere woorden, gegeven een willekeurig model v maakt het niet uit of $v(f) = 0$ of $v(f) = 1$ (iets anders kan niet!): in beide gevallen is $v(g) = 1$. Dus geldt voor elk model v dat $v(g) = 1$ en dus $\models g$.

   Verklaar je antwoorden. (10 + 10 + 10 punten)

5. Geef de kortste formule f van de propositielogica waarvoor geldt dat

$$f \equiv (a \to b) \to a$$

Verklaar je antwoord. (10 punten)

De kortste formule die equivalent is aan $(a \to b) \to a$ is a. De equivalentie volgt uit de waarheidstabel want de kolommen van a en $((a \to b) \to a$ zijn gelijk:

a	b	$(a \to b)$	$(a \to b) \to a$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Verder kunnen formules niet korter zijn dan één atomaire propositie. En het is duidelijk dat als er een andere propositie dan a gekozen was de formule nooit equivalent kan zijn, want zo'n propositie heeft altijd een 0 op één van de plekken waar a een 1 heeft staan. Dus a is de kortste formule met de gewenste eigenschap.