Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Toets 3: Talen en automaten
(23/10/13)

1. Geef een reguliere expressie voor de taal: (15 punten)

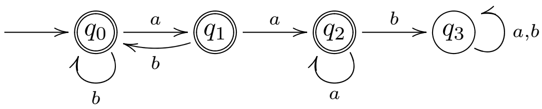
$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ is geen drievoud}\}$$

[Hint: Als een natuurlijk getal geen drievoud is, is het een drievoud plus één of een drievoud plus twee.]

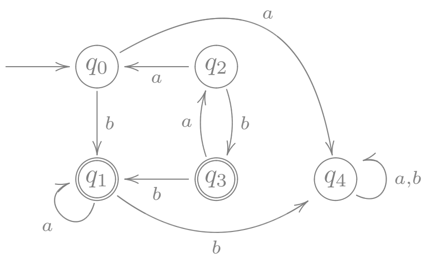
$$((a \cup b)(a \cup b)(a \cup b))^*(a \cup b)(\lambda \cup a \cup b)$$

2. Geef een eindige automaat voor de taal: (15 punten)

$$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat niet } aab\}$$



3. Gegeven de eindige automaat M_3:



Geldt voor alle woorden $w \in L(M_3)$ dat dan ook altijd $waaa \in L(M_3)$? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld. (15 punten)

Ja, dat geldt. Stel $w \in L(M_3)$. Dan is na het lezen van w de automaat in de toestand q_1, want q_1 en q_3 zijn de enige eindtoestanden, maar q_3 is niet bereikbaar vanaf de begintoestand. Na het lezen van $waaa$ zal de automaat nog steeds in toestand q_1 zijn, en omdat dit een eindtoestand is zal ook $waaa$ worden geaccepteerd, en geldt dus $waaa \in L(M_3)$.

4. Geef een rechtslineaire contextvrije grammatica G_4 met $\mathcal{L}(G_4) = L(M_3)$, waarin M_3 de automaat uit de vorige opgave is. (15 punten)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & bA \\ A & \rightarrow & aA \mid \lambda \end{array}$$

5. Iemand wil laten zien dat $ba \notin \mathcal{L}(G_5)$, waarin de grammatica G_5 gegeven is door de regels:

$$S \to aaSb \mid \lambda$$

Is de eigenschap

$$P_5(w) := w \text{ bevat geen } ba$$

een invariant waarmee dit kan worden aangetoond? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, leg uit waarom niet, en geef in dat geval een invariant $P_5'(w)$ waarmee dit wél kan worden aangetoond. (Voor deze $P_5'(w)$ hoeft dan niet bewezen te worden dat het echt een invariant is.) (15 punten)

Nee, P_5 is geen invariant. We hebben $bSa \to ba$ en $P_5(bSa)$ geldt wel, maar $P_5(ba)$ geldt niet.

Een invariant waar dit wel mee kan worden aangetoond is

$$P_5'(w) := w \text{ bevat twee keer zoveel } a\text{'s als } b\text{'s}$$

6. Geef een voorbeeld van een oneindige taal L_6 waarvoor geldt dat $L_6 \cap L_6^R$ eindig is. (15 punten)

$$L_6 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$$

Dit is duidelijk een oneindige taal. We hebben vervolgens

$$L_6^R = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ba, bbaa, bbbaaa, \ldots\}$$

Deze twee talen hebben alleen λ gemeenschappelijk. Dus

$$L_6 \cap L_6^R = \{\lambda\}$$

Deze doorsnede heeft maar één element en is dus eindig.