

Formeel Denken 2015
Uitwerkingen Toets 1: Propositieloga
(09/09/15)

In de eerste drie opgaven gebruiken we de volgende interpretatie voor de atomaire proposities:

R het regent
 Z de zon schijnt
 RB er is een regenboog

1. Geef twee proposities die respectievelijk de betekenis weergeven van de volgende twee Nederlandse zinnen:

(a) *Er is een regenboog, want de zon schijnt en het regent.*

$$RB \wedge Z \wedge R$$

(b) *Er is alleen een regenboog als de zon schijnt en het regent.*

$$RB \rightarrow Z \wedge R$$

Als je denkt dat bij een zin meerdere interpretaties verdedigbaar zijn, geef in je antwoord dan de verschillende mogelijkheden, en ook welke je het best vindt passen. (10 + 10 punten)

2. Geef een goede Nederlandse zin die het best de betekenis weergeeft van de propositie: (15 punten)

$$(\neg R \rightarrow R) \rightarrow R$$

Als uit het feit dat het niet regent volgt dat het wel regent, dan regent het.

3. Is de propositie uit opgave 2 logisch waar? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Ja. In de waarheidstabel

R	$\neg R$	$\neg R \rightarrow R$	$(\neg R \rightarrow R) \rightarrow R$
0	1	0	1
1	0	1	1

staan onder deze propositie alleen maar énen, en dus is deze propositie logisch waar.

4. Geef de volledige waarheidstabel van de propositie: (15 punten)

$$(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge b)$$

We korten in de tabel, om deze niet te breed te laten worden, af:

$$\begin{aligned} f_1 &:= (\neg a \wedge \neg b) \\ f_2 &:= (\neg a \wedge b) \\ f_3 &:= (a \wedge b) \end{aligned}$$

Dan is de waarheidstabel:

a	b	$a \rightarrow b$	$\neg a$	$\neg b$	f_1	f_2	f_3	$f_2 \vee f_3$	$f_1 \vee f_2 \vee f_3$	$(a \rightarrow b) \leftrightarrow f_1 \vee f_2 \vee f_3$
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

5. Schrijf de propositie (10 punten)

$$(\neg(a \wedge (a \wedge a)))$$

volgens de officiële grammatica uit de syllabus.

$$\neg(a \wedge (a \wedge a))$$

6. Geef een model v waarin de volgende propositie waar is: (10 punten)

$$(a \wedge (b \rightarrow c)) \leftrightarrow \neg a$$

Het unieke model waarin deze propositie waar is, is:

$$\begin{aligned} v(a) &= 1 \\ v(b) &= 1 \\ v(c) &= 0 \end{aligned}$$

Dit model correspondeert met de enige rij in de waarheidstabel

a	b	c	$b \rightarrow c$	$a \wedge (b \rightarrow c)$	$\neg a$	$(a \wedge (b \rightarrow c)) \leftrightarrow \neg a$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

waarin de formule een 1 heeft staan.

7. Laat f en g willekeurige proposities zijn. Als geldt dat $\not\models f$, of $\models g$, of allebei, geldt dan ook altijd $\models (\neg f \vee g)$? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Nee, dit geldt niet. Neem als tegenvoorbeeld $f = a$ en $g = b$. Dan volgt uit de waarheidstabel

a	b	$\neg a$	$\neg a \vee b$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

dat $\not\models f$, omdat a niet alleen énen heeft, en dus ook ' $\not\models f$, of $\models g$, of allebei'. Maar er geldt niet dat $\models \neg f \vee g$, want in de kolom van $\neg a \vee b$ staan niet alleen énen. Dus is deze implicatie niet waar.