Formeel Denken 2015
Uitwerkingen Toets 3: Talen en automaten
(21/10/15)

1. Geef een reguliere expressie voor de taal: (20 punten)

$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat een even aantal } a\text{'s}\}$$

Mogelijke antwoorden zijn:

$$((ab^*a) \cup b)^*$$
$$b^*(ab^*ab^*)^*$$
$$(b^*ab^*a)^*b^*$$
$$(b^*ab^*ab^*) \cup b^*$$

Als r één van deze expressies is, dan geldt dat $L_1 = \mathcal{L}(r)$.

2. Geef een rechtslineaire grammatica G_2 voor de taal: (15 punten)

$$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat zowel een even aantal } a\text{'s als een even aantal } b\text{'s}\}$$

Zij G_2 de rechtslineaire grammatica:

$$\begin{aligned} S &\to aA \mid bC \mid \lambda \\ A &\to aS \mid bB \\ B &\to aC \mid bA \\ C &\to aB \mid bS \end{aligned}$$

Dan geldt $\mathcal{L}(G_2) = L_2$. Bedenk dat de hulpsymbolen een soort toestand representeren:

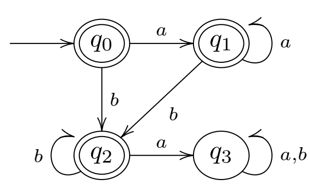
- S het aantal $a's$ en het aantal b's is even.
- A het aantal $a's$ is oneven en het aantal b's is even.
- B het aantal $a's$ is oneven en het aantal b's is oneven.
- C het aantal $a's$ is even en het aantal b's is oneven.

3. Geef een eindige automaat M_3 bij de contextvrije grammatica G_3: (20 punten)

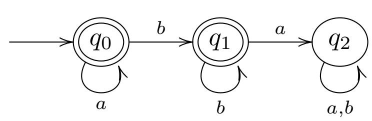
$$\begin{aligned} S &\to AB \\ A &\to aA \mid \lambda \\ B &\to bB \mid \lambda \end{aligned}$$

dus zo dat $L(M_3) = \mathcal{L}(G_3)$.

Bedenk dat $\mathcal{L}(G_3) = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Zij M_3 de automaat:



Dan geldt $L(M_3) = \mathcal{L}(G_3)$.
Een minimale, equivalente automaat is:



4. (a) Laat $|w|_a$ het aantal voorkomens van het symbool a in het woord w zijn, dus bijv. $|abccb|_b = 2$, $|S|_S = 1$ en $|S|_a = 0$. Iemand beweert dat: (10 punten)

$$P(w) := \; w \text{ bevat } aa \;\text{ en/of }\; 2|w|_S + 2|w|_A + |w|_a \leq 2$$

een invariant is voor de contextvrije grammatica G_4:

$$\begin{aligned} S &\to BAB \\ A &\to aaA \mid \lambda \mid aBa \\ B &\to bB \mid \lambda \mid bBaaA \end{aligned}$$

Klopt dit? Verklaar je antwoord.

Ja, het klopt, P is een invariant. Merk op dat de 'en/of' eigenlijk niets anders is dan de logische, inclusieve, of. Hier het bewijs van de twee eigenschappen van een invariant.

- $P(S)$ geldt want $2|S|_S + 2|S|_A + |S|_a = 2 + 0 + 0 \leq 2$.
- Zij v een woord waarvoor $P(v)$ geldt en v' een woord zodanig dat $v \to v'$. Als $P(v)$ geldt omdat v de combinatie aa bevat, zijn we meteen klaar want v' bevat dan ook aa; er verdwijnen immers nooit eindsymbolen en er kan ook nooit iets tussen twee eindsymbolen worden geplaatst. Dus mogen we aannemen dat $2|v|_S+2|v|_A+|v|_a \leq 2$. Er kunnen dan zeven reducties hebben plaatsgevonden:
  - $S \to BAB$. In dit geval geldt $|v'|_S = |v|_S - 1$, $|v'|_A = |v|_A + 1$ en $|v'|_a = |v|_a$. Dus

    $$\begin{aligned} 2|v'|_S + 2|v'|_A + |v'|_a &= 2(|v|_S - 1) + 2(|v|_A + 1) + |v|_a \\ &= 2|v|_S - 2 + 2|v|_A + 2 + |v|_a \\ &= 2|v|_S + 2|v|_A + |v|_a \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

    En dus geldt $P(v')$.
  - $A \to aaA$. In dit geval bevat v' de combinatie aa en geldt $P(v')$ dus.
  - $A \to \lambda$. In dit geval geldt $|v'|_S = |v|_S$, $|v'|_A = |v|_A - 1$ en $|v'|_a = |v|_a$. Dus

    $$\begin{aligned} 2|v'|_S + 2|v'|_A + |v'|_a &= 2|v|_S + 2(|v|_A - 1) + |v|_a \\ &= 2|v|_S + 2|v|_A - 2 + |v|_a \\ &= \big(2|v|_S + 2|v|_A + |v|_a\big) - 2 \\ &\leq 2 - 2 \\ &= 0 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

  - $A \to aBa$. In dit geval geldt $|v'|_S = |v|_S$, $|v'|_A = |v|_A - 1$ en $|v'|_a = |v|_a + 2$. Dus

    $$\begin{aligned} 2|v'|_S + 2|v'|_A + |v'|_a &= 2|v|_S + 2(|v|_A - 1) + |v|_a + 2 \\ &= 2|v|_S + 2|v|_A - 2 + |v|_a + 2 \\ &= 2|v|_S + 2|v|_A + |v|_a - 2 + 2 \\ &= 2|v|_S + 2|v|_A + |v|_a \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

  - $B \to bB$. Deze reductie verandert niets aan het aantal S'en, A's en a's, dus $P(v')$ geldt.
  - $B \to \lambda$. Deze reductie verandert niets aan het aantal S'en, A's en a's, dus $P(v')$ geldt.

– $B \to bBaaA$. In dit geval bevat v' de combinatie aa en geldt $P(v')$ dus.

(b) Iemand beweert dat: (10 punten)

$$\mathcal{L}(G_4) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat een even aantal } a\text{'s}\}$$

Klopt dit? Zo nee, geef een woord dat maar in één van deze twee talen zit. Verklaar je antwoord. (Hint: kijk naar de $P(w)$ uit het vorige onderdeel.)

Nee, dit klopt niet. Bekijk het woord $v = abababa$. Dit woord v bevat een even aantal a's (namelijk vier) en zit dus in $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat een even aantal } a\text{'s}\}$. Maar $P(abababa)$ geldt niet, want het bevat geen combinatie aa en $2|v|_S + 2|v|_A + |v|_a = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4$ en $4 \not\leq 2$. Dus $v \notin \mathcal{L}(G_4)$.

5. (a) We definiëren: (10 punten)

$$L_5 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ begint met een } a\}$$

Leg uit waarom:

$$L_5^* = L_5 \cup \{\lambda\}$$

Het bewijs gaat twee kanten op:

- $L_5 \cup \{\lambda\} \subseteq L_5^*$. Voor alle talen L geldt dat $L \subseteq L^*$, dus ook voor L_5. Verder geldt voor alle talen L dat $\lambda \in L^*$, dus ook voor L_5. Maar hieruit volgt dat $L_5 \cup \{\lambda\} \subseteq L_5^*$.
- $L_5^* \subseteq L_5 \cup \{\lambda\}$. Zij $w \in L_5^*$. Dan ofwel $w = \lambda$ ofwel $w = w_1 w_2 \ldots w_k$ voor $k \geq 1$ met $w_i \in L_5$ voor alle $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. In het eerste geval volgt meteen dat $w \in L_5 \cup \{\lambda\}$. In het tweede geval geldt dus in het bijzonder dat $w_1 \in L_5$. Dus w_1 begint met een a. Maar als w_1 met een a begint, dan begint $w = w_1 w_2 \ldots w_k$ ook met een a. Dus $w \in L_5$ en dus ook $w \in L_5 \cup \{\lambda\}$.

(b) Geef twee talen L en L' met alfabet $\Sigma = \{a,b\}$ zodat: (5 punten)

$$L \cap L' = \emptyset \quad L^* \neq \Sigma^* \quad L'^* \neq \Sigma^* \quad L \cup L' \neq \Sigma^* \quad L^* \cup L'^* = \Sigma^*$$

Verklaar je antwoord. (Als het je niet lukt aan al deze eisen te voldoen, probeer dan zo veel mogelijk van deze eigenschappen waar te laten zijn.)

Definieer $L_5' := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ begint met een } b\}$. Neem dan $L = L_5$ en $L' = L_5'$.

- $L \cap L' = \emptyset$. Omdat woorden uit L altijd met een a beginnen en die uit L' altijd met een b is de doorsnede $L \cap L'$ leeg, want er zijn geen woorden die zowel met een a als met een b beginnen.
- $L^* \neq \Sigma^*$. In het vorige onderdeel hebben we gezien dat $L^* = L \cup \{\lambda\}$. Dus als $w \in L^*$ geldt dat $w = \lambda$ of w begint met een a. Maar Σ^* bevat ook woorden die met een b beginnen en is dus strikt groter dan L^*.
- $L'^* \neq \Sigma^*$. Analoog aan het verhaal voor L geldt voor L' ook dat $L'^* = L' \cup \{\lambda\}$. Dus als $w \in L'^*$ geldt dat $w = \lambda$ of w begint met een b. Maar Σ^* bevat ook woorden die met een a beginnen en is dus strikt groter dan L'^*.
- $L \cup L' \neq \Sigma^*$. We weten dat $\lambda \in \Sigma^*$. Maar λ begint niet met een a en niet met een b. Het zit dus niet in L en ook niet in L'. En dus niet in $L \cup L'$.
- $L^* \cup L'^* = \Sigma^*$. Omdat Σ^* alle woorden over het alfabet $\{a,b\}$ bevat, is duidelijk dat $L^* \cup L'^* \subseteq \Sigma^*$. Verder hebben we al gezien dat $L^* = L \cup \{\lambda\}$ en $L'^* = L' \cup \{\lambda\}$. Dus $L^* \cup L'^* = L \cup L' \cup \{\lambda\}$. Maar als $w \in \Sigma^*$ dan geldt $w = \lambda$, w begint met een a of w begint met een b. En dus geldt dat $w \in L \cup L' \cup \{\lambda\} = L^* \cup L'^*$.