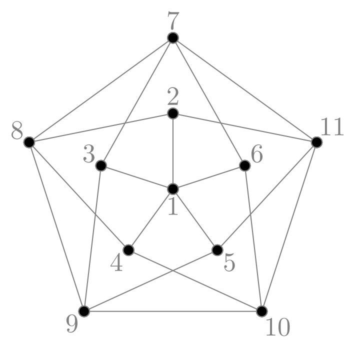
Formeel Denken 2015
Uitwerkingen Toets 4: Discrete wiskunde

(2/12/15)

1. De Grötzsch-graaf is:



(a) Heeft deze graaf een Euler-circuit? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Het gaat hier om een samenhangende graaf met 11 punten. We kunnen dus de stelling van Euler toepassen. Die zegt dat er een Euler-circuit is, precies dan als de graad van alle punten even is. Echter, de graad van punt 1 is 5 en dus oneven. Er bestaat dus geen Euler-circuit.

(b) Heeft deze graaf een Hamilton-circuit? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Er bestaat wel een Hamiltion-circuit. Neem bijvoorbeeld $1 \to 3 \to 7 \to 6 \to 10 \to 4 \to 8 \to 9 \to 5 \to 11 \to 2 \to 1$. Dit circuit doet alle punten precies één keer aan en is dus een Hamilton-circuit.

(c) Bestaat er een isomorfisme van deze graaf naar zichzelf dat niet ieder punt op zichzelf afbeeldt? Verklaar je antwoord. (10 punten)

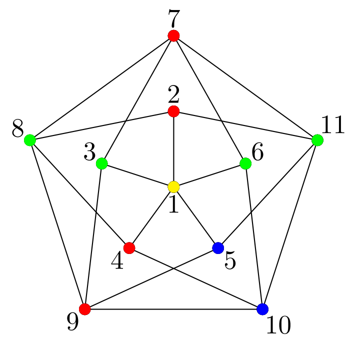
Ja, zo'n isomorfisme bestaat. Bij een isomorfisme moet de structuur van de graaf behouden blijven. Door de graaf over 72° te draaien, blijft de structuur natuurlijk hetzelfde, maar staan de punten zelf op andere plaatsen. Zo'n draaiing kunnen we voorstellen door het volgende isomorfisme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \mapsto & 1 & 2 & \mapsto & 6 & 3 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 3 & 5 & \mapsto & 4 & 6 & \mapsto & 5 \\ 7 & \mapsto & 11 & 8 & \mapsto & 7 & 9 & \mapsto & 8 \\ 10 & \mapsto & 9 & 11 & \mapsto & 10 & & & \end{array}$$

Omdat bijvoorbeeld punt 4 op punt 3 wordt afgebeeld, voldoet deze afbeelding aan de eis dat niet elk punt op zichzelf wordt afgebeeld.

(d) Geef het kleurgetal van deze graaf, en een bijbehorende kleuring. Je hoeft niet te verklaren waarom dit het kleurgetal van de graaf is, als het kleurgetal maar correct is. (15 punten)

Het kleurgetal is 4. Het plaatje bewijst dat er een puntkleuring bestaat met vier kleuren.



Het bewijs dat het niet met drie kleuren kan gaat als volgt. Neem aan dat er een kleuring met drie kleuren is, zeg geel, rood en blauw, en neem aan dat het middelpunt van de graaf (dat is dus punt 1) geel is. Vervang op de buitenste vijfhoek de kleur van ieder geel punt door de kleur van het corresponderende punt op de binnenste vijfhoek (dus als punt 7 geel is door de kleur van punt 2, etc.) Dit geeft niet altijd weer een kleuring van de hele graaf, maar wel altijd een kleuring van de subgraaf alleen bestaande uit de buitenste vijfhoek. Voorts is dit een kleuring met alleen nog maar de kleuren rood en blauw. Dus dat zou betekenen dat die buitenste vijfhoek-subgraaf kleurgetal twee zou hebben, maar dat kan niet, want dat is een ring met een oneven aantal punten. En dus kan de kleuring met drie kleuren van de hele graaf waar we mee begonnen niet bestaan.

2. (a) Geef $(n+1)^3$ volgens het binomium van Newton, en geef aan waar in de driehoek van Pascal de coëfficiënten hiervan te vinden zijn. (10 punten)

Volgens het binomium van Newton is $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. De coëfficiënten zijn gemarkeerd in de driehoek van Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ \boxed{1} & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \boxed{1} \end{array}$$

(b) We definiëren met recursie: (10 punten)

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= a_n + 3n^2 + 3n + 1 \qquad\qquad \text{voor } n \geq 0 \end{aligned}$$

Gebruik deze recursieve definitie om a_2 uit te rekenen, en verklaar hoe je aan je antwoord bent gekomen.

$$\begin{array}{lllllll} a_0 & = & 0 & & & & \\ a_1 & = & a_0 + 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 & = & 0 + 0 + 0 + 1 & = & 1 \\ a_2 & = & a_1 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 & = & 1 + 3 + 3 + 1 & = & 8 \end{array}$$

(c) Bewijs voor de rij uit het vorige onderdeel dat $a_n = n^3$ voor alle $n \geq 0$. (15 punten)

Propositie:

$a_n = n^3$ voor alle $n \geq 0$.

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad a_n = n^3$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(0)$ geldt, oftewel 3

$a_0 = 0^3$

Dit is zo, want per definitie geldt $a_0 = 0$ en tevens geldt $0^3 = 0$. 4

Inductiestap. Laat k een willekeurig getal zijn met $k \geq 0$. 5

Neem aan dat we al weten dat $P(k)$ geldt, oftewel 6

$a_k = k^3$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(k+1)$ ook geldt, oftewel 7

$a_{k+1} = (k+1)^3$

Dit is zo, want 8

$$\begin{array}{lcll} a_{k+1} & = & a_k + 3k^2 + 3k + 1 & \text{volgens recursieve definitie van } a_{k+1} \\ & = & k^3 + 3k^2 + 3k + 1 & \text{volgens IH} \\ & = & (k+1)^3 & \text{volgens het binomium van Newton} \end{array}$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$. 9

3. Sinterklaas heeft een zak met zes verschillende cadeautjes voor drie lieve kinderen. Op hoeveel manieren kan hij deze cadeautjes verdelen, als hij wil dat ieder kind twee cadeautjes in zijn of haar schoen krijgt? (10 punten)

Voor het eerste kind pakt Sinterklaas twee van de zes cadeautjes. Dat kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren. Voor het tweede kind pakt Sinterklaas twee van de vier overige cadeautjes. Dat kan op $\binom{4}{2} = 6$ manieren. Voor het derde kind pakt Sinterklaas de twee overgebleven cadeautjes. Dat kan op 1 manier. Het totaal aantal manieren is dan $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$.