Formeel Denken 2015
Uitwerkingen Toets 5: Modale logica
(16/12/15)

1. (a) Leg met behulp van formules van een modale logica uit wat het verschil in betekenis is tussen de volgende twee zinnen: (10 punten)

   - *Ik weet dat het regent.*
   - *Ik weet óf het regent.*

   Je moet zelf kiezen welke modale logica het best bij deze zinnen past, en welk 'woordenboek' je voor de formules wil gebruiken.

   We gebruiken epistemische logica en het simpele woordenboek:

R	het regent

   De zin *Ik weet dat het regent* is dan eenvoudig te vertalen naar de formule $\Box R$.

   De zin *Ik weet óf het regent* is dan te vertalen naar de formule $(R \to \Box R) \wedge (\neg R \to \Box \neg R)$. Immers, weten of het regent is hetzelfde als beweren dat als het regent, dan weten we ook dat het regent en als het niet regent, weten we dat het niet regent.

   Een duidelijk verschil is dat het bij de eerste variant dus wel regent en bij de tweede misschien niet.

   (b) Wat is de naam van de modale logica die je bij onderdeel 1a gebruikt hebt? (5 punten)

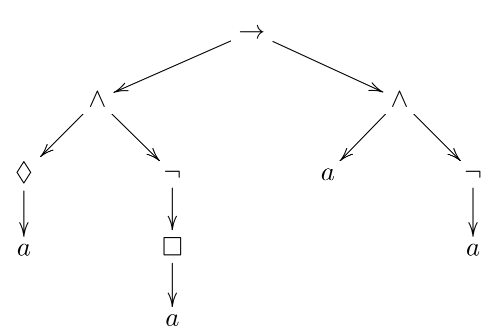
   Het gaat hier om epistemische logica.

   (c) Wat is in deze logica de interpretatie van $\Box f$ en $\Diamond f$? (10 punten)

   De interpretatie van $\Box f$ is dan: ik weet dat f.
   De interpretatie van $\Diamond f$ is dan: f is niet strijdig met mijn kennis.

2. (a) Teken de boom die hoort bij de volgende formule van de modale logica: (10 punten)

   $$\Diamond a \wedge \neg \Box a \to a \wedge \neg a$$



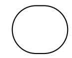
   (b) Schrijf de formule uit onderdeel 2a volgens de officiële grammatica uit de syllabus. (10 punten)

   De formule wordt officieel $((\Diamond a \wedge \Box a) \to (a \wedge \neg a))$.

   (c) Geef een Kripke-model $\mathcal{M}_2$ waarin de formule uit onderdeel 2a waar is, dus waarin geldt: (10 punten)

   $$\mathcal{M}_2 \vDash \Diamond a \wedge \neg \Box a \to a \wedge \neg a$$

   Teken dit model met rondjes en pijltjes. Verklaar je antwoord.

$\mathcal{M}_2 :$ x_1 

Bekijk de volgende tabel:

$\Vdash$	a	$\Diamond a$	$\Box a$	$\neg\Box a$	$\Diamond a \wedge \neg\Box a$	$\neg a$	$a \wedge \neg a$	$\Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$
x_1	0	0	1	0	0	1	0	1

De truc zit hem in de implicatie. Als we zorgen dat wat voor de pijl staat niet waar is, is de hele implicatie waar ongeacht de inconsistentie na de pijl.

Dus $x_1 \Vdash \Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$. Maar omdat x_1 de enige wereld in $\mathcal{M}_2$ is geldt dan automatisch $\mathcal{M}_2 \Vdash \Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$.

(d) Schrijf het model $\mathcal{M}_2$ uit onderdeel 2c als tripel $\langle W, R, V\rangle$. (10 punten)

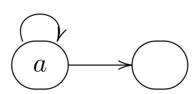
Er geldt:

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{x_1\} \\ R : W \to \mathcal{P}(W) & \text{met} & R(x_1) = \emptyset \\ V : W \to \mathcal{P}(\{a\}) & \text{met} & V(x_1) = \emptyset \end{array}$$

(e) Laat zien dat: (10 punten)

$$\nvDash \Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$$

Als er geen model voor de $\vDash$ staat, betekent dit dat de formule in alle modellen waar moet zijn. Dat is echter niet het geval.

$\mathcal{M}_2' :$ x_1  x_2

Bekijk de volgende tabel:

$\Vdash$	a	$\Diamond a$	$\Box a$	$\neg\Box a$	$\Diamond a \wedge \neg\Box a$	$\neg a$	$a \wedge \neg a$	$\Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$
x_1	1	1	0	1	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0	1	0	1

Omdat $x_1 \nVdash \Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$, geldt $\mathcal{M}_2' \nvDash \Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$ en dus $\nvDash \Diamond a \wedge \neg\Box a \to a \wedge \neg a$.

3. Geef een enkele LTL-formule die de situatie beschrijft waarin de volgende twee eigenschappen gelden: (15 punten)

- Op ieder moment is óf a óf b waar, maar niet allebei.
- Zowel a als b zijn ten hoogste drie keer achter elkaar waar, daarna moet de andere weer waar worden.

Verklaar je antwoord. (Als het je niet lukt beide eigenschappen tezamen met één formule te beschrijven, probeer dan in ieder geval één van de twee eigenschappen te formaliseren.)

De eerste eis kunnen we omschrijven als *op elk moment is a waar, of b is waar, maar $a \wedge b$ is niet waar*. In formule wordt dat

$$\mathcal{G}((a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b))$$

De tweede eis kan voor a worden omschreven als *op elk moment geldt dat als a waar is, a het moment daarna waar is en a nog een moment later weer waar is, dat dan weer een moment later a niet waar is en b wel*. Dat levert de formule

$$\mathcal{G}(a \wedge \mathcal{X}a \wedge \mathcal{X}\mathcal{X}a \to \mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}(\neg a \wedge b))$$

Voor b hebben we natuurlijk een analoge formule. Samen met de eerste eis krijgen we dan bijvoorbeeld:

$$\mathcal{G}\big((a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)\big) \wedge \mathcal{G}\big(a \wedge \mathcal{X}a \wedge \mathcal{X}\mathcal{X}a \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}(\neg a \wedge b)\big) \wedge \mathcal{G}\big(b \wedge \mathcal{X}b \wedge \mathcal{X}\mathcal{X}b \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}(\neg b \wedge a)\big)$$

Merk op dat deze formule nog wat versimpeld kan worden doordat de $\mathcal{G}$ samen genomen kan worden en doordat de $\mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}\neg a$ via het eerste deel van de formule al impliceert dat $\mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}b$.

$$\mathcal{G}\big((a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) \wedge (a \wedge \mathcal{X}a \wedge \mathcal{X}\mathcal{X}a \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}\neg a) \wedge (b \wedge \mathcal{X}b \wedge \mathcal{X}\mathcal{X}b \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X}\neg b)\big)$$