

Berekenbaarheid 2008, toets 3

vrijdag 19 december, 11.45–12.30

Er zijn vier opgaven die ieder twee punten opleveren, behalve opgave 2 die drie punten waard is. Één punt is gratis.

1. Bekijk de volgende functiedefinitie:

$$f_1 = s \circ p_1^{(k)} \circ (\text{pred}, e \circ p_1^{(l)})$$

(Hierin is e de ‘lege functie’ die voor iedere input ongedefinieerd is.)
Voor welke natuurlijke getallen k en l is dit een correcte definitie?
Welke functie f_1 wordt er in dat geval gedefinieerd? Is dat een totale functie? Verklaar je antwoord.

2. We definiëren de functie f_2 met primitieve recursie:

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) &= x \\ f_2(x, y + 1) &= x \cdot f_2(x, y) + y \end{aligned}$$

Geef de waarde van $f_2(2, 2)$. Voorts kunnen we f_2 schrijven als:

$$f_2 = \text{primrec}(g_2, h_2)$$

Geef functies g_2 en h_2 waarvoor deze gelijkheid geldt. Schrijf deze functies ook als compositie van functies uit de lijst op pagina 2.

3. We definiëren $f_3(x)$ als het grootste priemgetal p dat $x + 2$ deelt. Geef de waarden van $f_3(0)$ tot en met $f_3(8)$. Laat voorts zien dat f_3 een primitief recursieve functie is. (Je mag hierbij gebruiken dat de functies in de lijst op pagina 2 primitief recursief zijn.)
4. Bestaat er een totale μ -recursieve functie die niet primitief recursief is? Verklaar je antwoord.

	$\text{id}(x)$	$= x$		
	$z(x)$	$= 0$		
	$s(x)$	$= x + 1$		
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= x_i$		
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= n$		
$\text{pred}(y)$	$= y - 1$		$\text{eq}(x, y)$	$=$ als $x = y$ dan 1 anders 0
$\text{add}(x, y)$	$= x + y$		$\text{ne}(x, y)$	$=$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0
$\text{mult}(x, y)$	$= x \cdot y$		$\text{max}(x, y)$	$=$ het maximum van x en y
$\text{sub}(x, y)$	$= x - y$		$\text{min}(x, y)$	$=$ het minimum van x en y
$\text{exp}(x, y)$	$= x^y$		$\text{quo}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0
$\text{sg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0		$\text{rem}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders x
$\text{cosg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1		$\text{divides}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0
$\text{lt}(x, y)$	$=$ als $x < y$ dan 1 anders 0		$\text{even}(x)$	$=$ als x even is dan 1 anders 0
$\text{gt}(x, y)$	$=$ als $x > y$ dan 1 anders 0		$\text{prime}(x)$	$=$ als x priem is dan 1 anders 0
$\text{le}(x, y)$	$=$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0		$\text{pn}(x)$	$=$ het x -de priemgetal
$\text{ge}(x, y)$	$=$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0			(dus $\text{pn}(0) = 2$, $\text{pn}(1) = 3$, etc.)