

# Berekenbaarheid 2009, hertentamen

vrijdag 9 april 2010, 13.30–15.30

Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren en 1 punt is gratis. Let op: bij het ‘definiëren’ van een Turing machine moet je deze geven door middel van een toestandsdiagram. Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing machine die de volgende taal accepteert door eindtoestand:

$$L_1 := \{ubvbw \mid u, w \in \{a, b\}^*, v \in \{a\}^*\}$$

2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing machine met input alfabet  $\{a, b\}$  die de taal  $L_1$  uit de vorige opgave accepteert door eindtoestand, en waarbij een correcte input  $w \in L_1$  altijd wordt geaccepteerd in ten hoogste  $\text{length}(w) + 1$  stappen.
3. Laat zien dat iedere recursief opsombare taal kan worden herkend door een Turing machine met precies één eindtoestand.
4. Beschrijf de relatie tussen beslisbare problemen en recursieve talen. Beschrijf voorts de taal die hoort bij het blank tape probleem. Is deze taal recursief? Verklaar je antwoord.
5. Laat zien dat het onbeslisbaar is, gegeven een woord  $w$ , of de universele Turing machine  $U$  stopt met input  $w$ .
6. Laat zien dat het onbeslisbaar is of er bij een Turing machine  $M$  een input bestaat waarbij de machine na eindig veel stappen stopt.
7. Geef (mogelijk partiële) functies  $g$  en  $h$  zodat  $g \circ h = e$ , maar  $g \neq e$  en  $h \neq e$ . (Hierin is  $e$  de ‘lege’ functie, met het lege domein.) Verklaar je antwoord.
8. De functie  $f_8$  is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f_8(x, 0) &= 1 \\ f_8(x, y + 1) &= x^{f_8(x, y)} \end{aligned}$$

Geef de waarde van  $f_8(2, 3)$  en van  $f_8(1, 10)$ . Laat voorts zien dat  $f_8$  primitief recursief is door hem te schrijven als  $f_8 = \text{primrec}(g_8, h_8)$ . Geef de  $g_8$  en  $h_8$  die je hebt gekozen als compositie van functies op pagina 3.

9. De functie `sqrt` is gedefinieerd door

$$\text{sqrt}(x) = \begin{cases} y & \text{als } x = y^2 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat `sqrt` recursief is. (Je mag gebruiken dat de functies op pagina 3 primitief recursief zijn.) Is `sqrt` ook *primitief* recursief?

	$\text{id}(x)$	$=$	$x$	
	$z(x)$	$=$	$0$	
	$s(x)$	$=$	$x + 1$	
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$=$	$x_i$	
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$=$	$n$	
$\text{pred}(y)$	$=$	$y \dot{-} 1$		
$\text{add}(x, y)$	$=$	$x + y$		
$\text{mult}(x, y)$	$=$	$x \cdot y$		
$\text{sub}(x, y)$	$=$	$x \dot{-} y$		
$\text{exp}(x, y)$	$=$	$x^y$		
$\text{sg}(x)$	$=$	als $x \neq 0$ dan 1 anders 0		
$\text{cosg}(x)$	$=$	als $x \neq 0$ dan 0 anders 1		
$\text{lt}(x, y)$	$=$	als $x < y$ dan 1 anders 0		
$\text{gt}(x, y)$	$=$	als $x > y$ dan 1 anders 0		
$\text{le}(x, y)$	$=$	als $x \leq y$ dan 1 anders 0		
$\text{ge}(x, y)$	$=$	als $x \geq y$ dan 1 anders 0		
	$\text{eq}(x, y)$	$=$	als $x = y$ dan 1 anders 0	
	$\text{ne}(x, y)$	$=$	als $x \neq y$ dan 1 anders 0	
	$\text{max}(x, y)$	$=$	het maximum van $x$ en $y$	
	$\text{min}(x, y)$	$=$	het minimum van $x$ en $y$	
	$\text{quo}(x, y)$	$=$	als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0	
	$\text{rem}(x, y)$	$=$	als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders $x$	
	$\text{divides}(x, y)$	$=$	als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0	
	$\text{even}(x)$	$=$	als $x$ even is dan 1 anders 0	
	$\text{prime}(x)$	$=$	als $x$ priem is dan 1 anders 0	
	$\text{pn}(x)$	$=$	het $x$ -de priemgetal (dus $\text{pn}(0) = 2$ , $\text{pn}(1) = 3$ , etc.)	