

# Berekenbaarheid 2011, hertentamen

dinsdag 21 februari, 13.30–15.30

Denk eraan je naam en studentnummer op je uitwerkingen te vermelden. Iedere opgave is 1 punt waard, behalve de eerste twee opgaven die  $1\frac{1}{2}$  punt waard zijn, en 1 punt is gratis. Misschien is het een goed idee de bewerkelijker opgaven tot het eind te bewaren. Veel succes!

1. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een standaard Turing machine met input alfabet  $\Sigma = \{a, b\}$  die zijn input één plaats naar links ‘roteert’ (d.w.z., die het eerste symbool eraf haalt en dat erachter plakt; en waarbij het lege woord onveranderd wordt gelaten) en daarna termineert met de kop weer aan het begin van de tape. Bij input *aaabbb* moet dus met begintoestand van de tape

$$\begin{array}{c} BaaabbbB \dots \\ \uparrow \end{array}$$

de machine termineren in de toestand

$$\begin{array}{c} BaabbaB \dots \\ \uparrow \end{array}$$

2. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal

$$L_2 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{er is een } n \in \mathbb{N} \text{ zodat } w \text{ wel } ca^n c \text{ maar niet } cb^n c \text{ bevat}\}$$

herkent door eindtoestand. Een correcte input  $w$  moet worden herkend in minder dan  $5|w| + 5$  stappen.

3. Definieer met behulp van de macro’s op pagina 3 een Turing machine die de numerieke functie

$$\min(n, m) = \begin{cases} n & \text{als } n \leq m \\ m & \text{als } m \leq n \end{cases}$$

berekent.

4. Geef een voorbeeld van een taal die niet recursief opsombaar is. Wat is de redenering die aantoont dat deze taal niet recursief opsombaar is? En is deze taal wél recursief? Verklaar je antwoorden.
5. Het probleem  $P_5$  vraagt of een gegeven Turing machine  $M$  stopt met alle inputs van lengte 100 (daar zijn er dus  $2^{100}$  van, want het alfabet is  $\Sigma = \{0, 1\}$ ). Laat met reductie zien dat dit probleem onbeslisbaar is.

Kan deze onbeslisbaarheid ook bewezen worden met de stelling van Rice? Verklaar je antwoord.

6. Geef een numerieke functie  $f_6 \neq \text{id}$  waarvoor geldt dat

$$f_6 \circ f_6 \circ f_6 = \text{id}$$

Moet  $f_6$  totaal zijn? Verklaar je antwoorden.

7. We definiëren met primitieve recursie een functie  $f_7$  door

$$f_7 := \text{primrec}(c_0^{(0)}, p_2^{(2)})$$

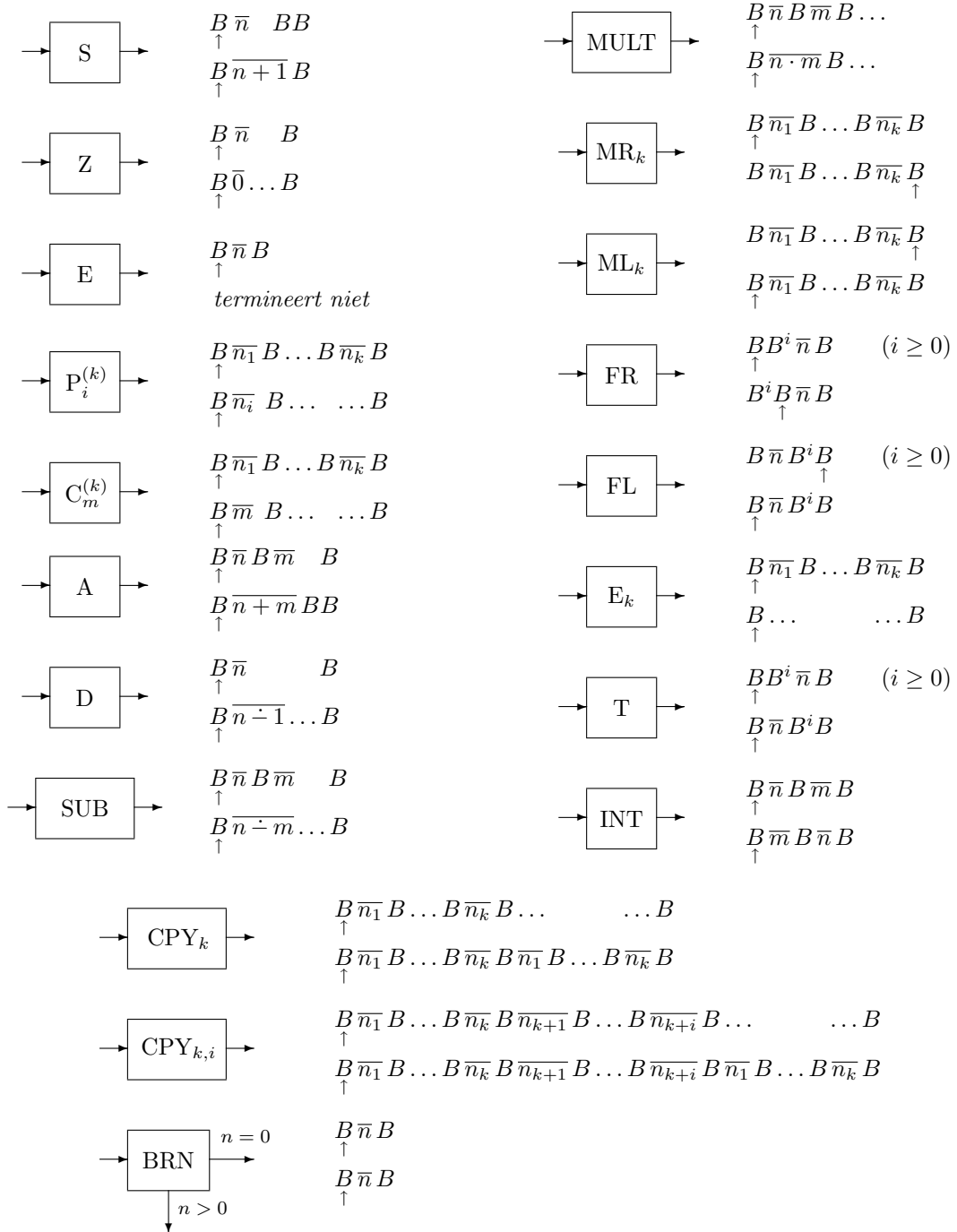
Geef de recursievergelijkingen die bij deze definitie horen. Gebruik deze om  $f_7(100)$  te berekenen.

Is voorts de functie  $f_7$  één van de functies op pagina 4? Zo ja, welke? Verklaar je antwoorden.

8. Gegeven een functie  $k$  met ariteit 1 die primitief recursief is. Laat zien dat de functie

$$f_8(x) = \begin{cases} 1 & \text{als er } y_1 \geq x \text{ en } y_2 \geq x \text{ bestaan met } k(y_1 \cdot y_2) \neq 0 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

$\mu$ -recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.



$$\begin{aligned}
\text{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x + 1 \\
p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) &= n
\end{aligned}$$

$\text{pred}(y) = y \dot{-} 1$	$\text{eq}(x, y) =$ als $x = y$ dan 1 anders 0
$\text{add}(x, y) = x + y$	$\text{ne}(x, y) =$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0
$\text{mult}(x, y) = x \cdot y$	$\text{max}(x, y) =$ het maximum van $x$ en $y$
$\text{sub}(x, y) = x \dot{-} y$	$\text{min}(x, y) =$ het minimum van $x$ en $y$
$\text{exp}(x, y) = x^y$	$\text{quo}(x, y) =$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0
$\text{fact}(x) = x!$	$\text{rem}(x, y) =$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders $x$
$\text{sg}(x) =$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0	$\text{divides}(x, y) =$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0
$\text{cosg}(x) =$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1	$\text{even}(x) =$ als $x$ even is dan 1 anders 0
$\text{lt}(x, y) =$ als $x < y$ dan 1 anders 0	$\text{prime}(x) =$ als $x$ priem is dan 1 anders 0
$\text{gt}(x, y) =$ als $x > y$ dan 1 anders 0	$\text{pn}(x) =$ het $x$ -de priemgetal
$\text{le}(x, y) =$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0	(dus $\text{pn}(0) = 2$ , $\text{pn}(1) = 3$ , etc.)
$\text{ge}(x, y) =$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0	