Berekenbaarheid 2017
Hertentamen
5 januari 2018

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Pas op: bij een aantal opgaven wordt je gevraagd het antwoord te verklaren, vergeet dit niet!

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 die de taal

$$L_1 := \{a^n b^n a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

herkent door eindtoestand.

2. Definieer een non-deterministische twee-tape Turing-machine M_2 die de taal

$$L_2 := \{ucv \mid u, v \in \{a, b, c\}^* \text{ en } |u|_a = |v|_b\}$$

herkent door eindtoestand. Hierin is $|u|_a$ het aantal maal dat het symbool a voorkomt in het woord u. Er geldt bijvoorbeeld dat $aabcaaacbab \in L_2$, want $|aab|_a = 2$ en $|aaacbab|_b = 2$.

Zorg ervoor dat een woord $w \in L_2$ altijd wordt herkend in ten hoogste $|w| + 2$ stappen.

3. Implementeer de macro $C_3^{(4)}$ uitsluitend gebruik makend van de macro's ML_1, MR_1, E_1, Z en S. Je mag in je machine dus geen andere macro's, en ook geen expliciete toestanden en transities gebruiken.

Zie pagina 3 voor de betekenis van deze macro's.

4. Laat zien dat iedere recursief opsombare taal kan worden herkend door een Turing-machine die voor geen enkele input abnormaal termineert (= links van de tape afloopt).

5. Bestaat er een code $R(M_5)$ van een Turing-machine M_5 die een palindroom is (dus met $R(M_5)^R = R(M_5)$) en waarvoor geldt dat $L(M_5) \neq \emptyset$ en $L(M_5) \neq \{0, 1\}^*$? Verklaar je antwoord. Geef hierbij expliciet het toestandsdiagram van M_5.

Zie bladzijde 4 voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp.

6. Het probleem P_6 is gedefinieerd als:

   input: $R(M)$
   vraag: stopt M voor minstens twee verschillende inputs?

   Laat zien dat P_6 onbeslisbaar is.

7. We definiëren het probleem P_7 als:

   input: $R(M_1)R(M_2)$
   vraag: is er een input w waarvoor $M_1(w) = M_2(w)$ (dat wil zeggen dat beide machines termineren met hetzelfde op de tape)?

   Laat zien dat P_7 onbeslisbaar is.

8. Geef alle mogelijke combinaties van unaire functies f_1 en f_2 waarvoor $f_1 \circ f_2$ een totale functie is, en

   $$\mathsf{dom}(f_2 \circ f_1) = \{0\}$$

   dus de functie $f_2 \circ f_1$ partieel is en alleen gedefinieerd voor input 0. Verklaar je antwoord.

9. We definiëren de numerieke functie f_9 door:

   $$f_9 := \textbf{primrec}\big(c_1^{(0)}, \mathsf{mult} \circ (s \circ p_1^{(2)}, p_2^{(2)})\big)$$

   Bereken $f_9(4)$ en verklaar hoe je aan dat antwoord bent gekomen. Geef hierbij expliciet de recursievergelijkingen van f_9.

10. Laat k een totale unaire numerieke functie zijn waarvan *niet* gegeven is dat deze μ-recursief is. We definiëren de functie f_{10} door:

    $$f_{10}(x) := \begin{cases} 1 & \text{als er een } y \geq x \text{ bestaat met } k(y) \text{ een priemgetal} \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

    Laat zien dat f_{10} altijd μ-recursief is (dus ook als k niet berekenbaar is). Je mag hierbij gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

Macro	Invoer	Uitvoer
$\rightarrow \boxed{\mathrm{S}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{Z}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{E}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\rightarrow \boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\dots\quad\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\dots\quad\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{A}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{D}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} 1}\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{SUB}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad\; B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} m}\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{MULT}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\dots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\dots$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{MR}_k} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{ML}_k} \rightarrow$	$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{FR}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{FL}} \rightarrow$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{E}_k} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\dots\qquad\quad\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{T}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{INT}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{CPY}_k} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\dots\qquad\dots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\dots\qquad\dots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{BRN}} \xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n>0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2, \mathsf{pn}(1) = 3, \text{etc.})
\end{aligned}$$