Berekenbaarheid 2017
Tentamen
6 november 2017

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Pas op: bij een aantal opgaven wordt je gevraagd het antwoord te verklaren, vergeet dit niet!

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a\}$ die bij input a^n als output $a^{\lfloor n/2 \rfloor}$ heeft. Hierin betekent $\lfloor \dots \rfloor$ naar beneden afronden. Er moet bijv. gelden dat $M_1(aaaaa) = aa$. Zorg ervoor dat bij terminatie de kop van de machine weer aan het begin van de tape staat.

2. Definieer een non-deterministische twee-tape Turing-machine M_2 die de taal

   $$L_2 := \{u_1 u_2 \mid u_1, u_2 \in \{a, b\}^* \text{ en } |u_1|_a = |u_2|_b\}$$

   herkent door eindtoestand. Hierin is $|u|_x$ het aantal maal dat het symbool x voorkomt in het woord u. Er geldt bijvoorbeeld dat $aabaaabab \in L_2$, want $|aab|_a = 2$ en $|aaabab|_b = 2$.

   Zorg ervoor dat een woord $w \in L_2$ altijd wordt herkend in ten hoogste $|w| + 3$ stappen.

3. Implementeer de macro $P_3^{(4)}$, uitsluitend gebruik makend van de macro's ML_n, MR_n, E_n en T. Je mag in je machine dus geen andere macro's, en ook geen expliciete toestanden en transities gebruiken.

   Zie pagina 5 voor de betekenis van deze macro's.

4. Waarom is het in het licht van de Church-Turing-hypothese niet verrassend dat Turing-machines met meer dan één tape precies de recursief opsombare talen herkennen?

5. Voor iedere Turing machine M is het probleem H_M (het halting probleem voor de machine M) gedefinieerd als:

   input: w
   vraag: stopt M met input w?

   Geef een code $R(M_5)$ van een Turing-machine M_5 waarvoor het probleem H_{M_5} niet-triviaal en beslisbaar is. Verklaar je antwoord.

Zie bladzijde 6 voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp.

6. Zowel in deze opgave als in de volgende opgave is U de universele Turing-machine uit het boek.

   (a) Het probleem H_U is gedefinieerd als:

   input: w
   vraag: stopt U met input w?

   Laat zien dat H_U onbeslisbaar is.

   (b) We definiëren het probleem P_6 als:

   input: $R(M)$
   vraag: stopt U met input $R(M)$?

   Is P_6 onbeslisbaar? Zo ja, laat zien dat dit zo is. Zo nee, verklaar waarom niet.

7. We definiëren het probleem P_7 als:

   input: $R(M)$
   vraag: stopt M met input $R(U)$?

   Laat zien dat P_7 onbeslisbaar is.

8. We definiëren de partiële numerieke functie k als:

$$k(n) := \begin{cases} \uparrow & \text{als } n = 0 \\ 0 & \text{als } n > 0 \end{cases}$$

   Geef functies f_1 en f_2 zodat:

$$f_1 \circ f_2 = e$$
$$f_2 \circ f_1 = k$$

   Hierin is e de lege functie die voor iedere input ongedefinieerd is.

   Verklaar je antwoord.

9. We definiëren de numerieke functie f_9 door:

$$f_9 := \textbf{primrec}(c_{2017}^{(0)}, \mathsf{exp})$$

   Bereken $f_9(4)$ en verklaar hoe je aan dat antwoord bent gekomen.

10. We coderen eindige rijtjes natuurlijke getallen als een natuurlijk getal op de volgende manier. Het rijtje

$$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$$

wordt gecodeerd door het getal

$$2^{a_0+1} \cdot 3^{a_1+1} \cdot 5^{a_2+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$$

Hierin is p_i het i-de priemgetal, tellend vanaf nul. De code van het rijtje $\langle 2, 1 \rangle$ is bijvoorbeeld $2^{2+1} \cdot 3^{1+1} = 8 \cdot 9 = 72$. De code van het lege rijtje $\langle \rangle$ is 1.

De functie f_{10} geeft aan of een getal een code van een rijtje is. Deze is dus gedefinieerd als:

$$f_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ de code van een rijtje is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

We hebben bijvoorbeeld $f_{10}(72) = 1$, want 72 is de code van $\langle 2, 1 \rangle$, maar $f_{10}(75) = 0$, want $75 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ is niet de code van een rijtje.

Laat zien dat f_{10} primitief recursief is. Je mag gebruiken dat alle functies in het lijstje op bladzijde 6 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\;\;\ldots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\;\;\ldots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\;\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;\;\;\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot-} 1}\ldots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\;\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot-} m}\ldots B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN (uitgangen: $n = 0$, $n > 0$)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$