

Berekenbaarheid 2017
Uitwerkingen Toets 2
10 oktober 2017

1. Geef een woord $w_1 \in \{0, 1\}^*$ (expliciet als een rij nullen en enen) met de eigenschap dat de universele Turing-machine U stopt met w_1 als input, maar niet stopt met w_1w_1 als input. In andere woorden, er moet gelden $U(w_1)\downarrow$ en $U(w_1w_1)\uparrow$. Verklaar je antwoord. (3 punten)

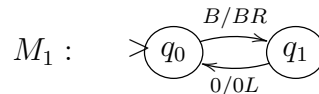
Zie de achterkant van dit blaadje voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp.

Omdat U moet stoppen met w_1 als input, moet w_1 met de code van een Turing-machine M_1 beginnen. Het makkelijkst is om gewoon $w_1 = R(M_1)$ te nemen. Er moet dan gelden dat

$$U(w_1) = U(R(M_1)) = M_1(\lambda)\downarrow$$

$$U(w_1w_1) = U(R(M_1)R(M_1)) = M_1(R(M_1))\uparrow$$

Dus M_1 moet stoppen met input λ maar niet stoppen met als input zijn eigen code. Omdat zo'n code altijd met een 0 begint, is het het makkelijkst voor M_1 te nemen:



Een code van deze machine, en daarmee het antwoord op deze opgave, is:

$$w_1 = R(M_1) = \mathbf{000101110110111011001101010101000}$$

2. Het probleem P heeft als input een Turing-machine M , en vraagt of er een $w \in \{0, 1\}^*$ bestaat met de eigenschap dat $M(w)\downarrow$ en $M(ww)\uparrow$. Dit probleem is onbeslisbaar. (3 punten)

Kan de stelling van Rice gebruikt worden om te laten zien dat P onbeslisbaar is? Zo nee, waarom niet? Zo ja, geef een bewijs van de onbeslisbaarheid van P dat de stelling van Rice gebruikt.

Ja, de stelling van Rice kan worden gebruikt, want dit probleem vraagt naar de eigenschap van de taal $L(M)$ van de machine M , namelijk of er een woord w bestaat met $w \in L(M)$ en $ww \notin L(M)$.

Om Rice te mogen toepassen moeten we alleen laten zien dat dit probleem niet-triviaal is. Een input waarvoor het antwoord ‘ja’ is, is volgens de vorige opgave de universele machine, dus we kunnen nemen $M_{\text{ja}} = U$. Een input waarvoor het antwoord ‘nee’ is, is de machine die voor iedere input stopt, dus we kunnen voor M_{nee} nemen:

$$M_{\text{nee}} : \quad \textcircled{q_0}$$

3. Laat zien dat het probleem P uit de vorige opgave onbeslisbaar is zonder de stelling van Rice te gebruiken. (3 punten)

Als er in je antwoord één of meer constructies voorkomen van Turing-machines in termen van een andere Turing-machine, geef deze dan (ook) door middel van een diagram.

De onbeslisbaarheid volgt ook door het blank tape probleem B te reduceren naar het probleem P . Als we B met behulp van P kunnen oplossen, en P is beslisbaar, dan is B daarmee ook beslisbaar. Maar B is niet beslisbaar, en daarom is P dus ook niet beslisbaar.

De reductie bestaat eruit bij iedere machine M waarvoor we willen weten of deze stopt met een blanco tape, een machine M' te maken waarvoor P deze informatie geeft. We willen dus:

$$M(\lambda)\downarrow \iff \text{er bestaat een } w \text{ met } M'(w)\downarrow \text{ en } M'(ww)\uparrow$$

Een constructie die deze eigenschap heeft is om voor M' te nemen:

- (a) als de input minstens twee symbolen bevat, termineer dan niet
- (b) wis de input
- (c) doe M

Als M stopt met de lege tape, stopt M' als de input 0 is, maar M' stopt niet als de input 00 is (en de w die dan bestaat is natuurlijk $w = 0$). Als M niet stopt met de lege tape, stopt M' natuurlijk ook voor geen enkele input en bestaat er geen w met de gewenste eigenschap.

De diagrammen waar in de opgave om wordt gevraagd zijn:

