Berekenbaarheid 2017
Uitwerkingen Toets 3
24 oktober 2017

1. We definiëren de numerieke functie f_1 door: (2 punten)

$$f_1(x, y) = x^y + y^x$$

Schrijf f_1 als compositie van functies uit de lijst op de achterkant van dit blaadje.

$$f_1 = \mathsf{add} \circ (\mathsf{exp} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}), \mathsf{exp} \circ (p_2^{(2)}, p_1^{(2)}))$$

Ook goed is:

$$f_1 = \mathsf{add} \circ (\mathsf{exp}, \mathsf{exp} \circ (p_2^{(2)}, p_1^{(2)}))$$

Merk op dat de projecties met een kleine letter p worden geschreven.

2. Gegeven een primitief recursieve functie k. We definiëren de numerieke functie f_2 door:

$$f_2(x, y) := \sum_{i=0}^{y} k(x, i)$$

(a) Geef recursievergelijkingen voor f_2, met recursie naar y. (1 punt)

$$f_2(x, 0) = k(x, 0)$$
$$f_2(x, y + 1) = f_2(x, y) + k(x, y + 1)$$

(b) Schrijf f_2 als (1 punt)

$$f_2 = \textbf{primrec}(g, h)$$

waarbij g en h geschreven zijn als compositie van k en functies uit de lijst op de achterkant van dit blaadje.

We willen dus:

$$g(x) = k(x, 0)$$
$$h(x, y, w) = w + k(x, y + 1)$$

Ofwel, functioneel geschreven:

$$g = k \circ (p_1^{(1)}, c_0^{(1)})$$
$$h = \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, k \circ (p_1^{(3)}, s \circ p_2^{(3)}))$$

Dus de gevraagde schrijfwijze is:

$$f_2 = \textbf{primrec}\big(k \circ (p_1^{(1)}, c_0^{(1)}), \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, k \circ (p_1^{(3)}, s \circ p_2^{(3)}))\big)$$

(c) Laat zien dat f_2 primitief recursief is zonder te gebruiken dat je al weet dat je met begrensde operatoren primitief recursieve functies definieert. Je mag gebruiken dat de functies uit de lijst op de achterkant van dit blaadje allemaal primitief recursief zijn. (1 punt)

De primitief recursieve functies zijn precies de functies die te maken zijn uit de basisfuncties met compositie en primitieve recursie. In de vorige deelopgave werd f_2 gemaakt met vier composities en één primitieve recursie uit de functies k en s, add, $p_i^{(k)}$, $c_n^{(k)}$. Van de eerste is in de opgave gegeven dat deze primitief recursief is, en de andere staan in de lijst op de achterkant van dit blaadje en zijn ook allemaal primitief recursief. Dus is f_2 ook primitief recursief.

(d) Geef de ariteiten van k, g, h en f_2 in deze opgave. (1 punt)

$$\begin{aligned}\mathsf{arity}(k) &= 2\\ \mathsf{arity}(g) &= 1\\ \mathsf{arity}(h) &= 3\\ \mathsf{arity}(f_2) &= 2\end{aligned}$$

3. Gegeven een primitief recursieve functie l. We definiëren de numerieke functie f_3 door: (3 punten)

$$f_3(x) := \begin{cases} \uparrow & \text{als } l(x,y) \text{ een kwadraat is voor iedere } y \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat f_3 μ-recursief is. Je mag gebruiken dat de functies uit de lijst op de achterkant van dit blaadje allemaal primitief recursief zijn.

Dit volgt uit het feit dat $f_3(x)$ te schrijven is als:

$$f_3(x) = c_0^{(1)}(\mu y.\, \mathsf{cosg}(\sum_{i=0}^{l(x,y)} \mathsf{eq}(l(x,y), i^2)))$$

[Merk op dat cosg in plaats van $c_0^{(1)}$ niet werkt, want als de y die gevonden wordt gelijk is aan 0, dan geeft dat de foute uitkomst. Merk ook op dat de bovengrens van de $\sum$ gelijk moet zijn aan $l(x,y)$ om in het algemeen groot genoeg te zijn. En tenslotte: '$l(x,y)$ is een kwadraat' is wat anders dan '$l(x,y) = y^2$'.]

Om in te zien dat deze schrijfwijze correct is, moet je

$$\sum_{i=0}^{l(x,y)} \mathsf{eq}(l(x,y), i^2)$$

lezen als '$l(x,y)$ is een kwadraat', want er staat iets als 'er bestaat een i zodat $l(x,y) = i^2$'. Er wordt dus naar een y gezocht waarbij $l(x,y)$ géén ('cosg')

kwadraat is, en als die wordt gevonden is de uitkomst 0. Als die er niet is gaat het zoeken oneindig lang door, en is de functie dus ongedefinieerd.

Dat deze schrijfwijze impliceert dat f_3 μ-recursief is volgt uit het feit dat aan de rechterkant alleen primitief recursieve functies, begrensde operatoren en μ-recursie worden gebruikt.