Berekenbaarheid 2018
Toets 2
19 oktober 2018

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Het cijfer voor deze toets is de som van de punten voor de opgaven, plus nog 1 gratis punt. Veel succes!

1. (a) Geef numerieke functies f_1 en f_2 zodat de compositie $f_1 \circ (f_2, f_2)$ totaal is, maar de compositie $f_2 \circ (f_1, f_1, f_1)$ niet totaal is. (1 punt)

   (*Hint:* het is waarschijnlijk handig om eerst opgave 1b te maken, voor je aan 1a begint.)

   (b) Geef de ariteiten van de vier functies f_1, f_2, $f_1 \circ (f_2, f_2)$ en $f_2 \circ (f_1, f_1, f_1)$. (1 punt)

2. We kunnen de Fibonacci-functie fib als volgt definiëren. Eerst definiëren we een functie f met primitieve recursie:

$$f(0) = 18$$
$$f(y+1) = \mathsf{gn}_1\big(\mathsf{dec}(1, f(y)), \mathsf{dec}(0, f(y)) + \mathsf{dec}(1, f(y))\big)$$

   Vervolgens definiëren we hieruit:

$$\mathsf{fib}(x) := \mathsf{dec}(0, f(x))$$

   (a) Waarom is $f(0)$ gedefinieerd als 18? (1 punt)

   (b) Schrijf $f = \textbf{primrec}(g, h)$ en geef g en h als compositie van functies uit het lijstje op de achterkant van dit blaadje. (2 punten)

   (c) Schrijf fib als compositie van f en functies op de achterkant van dit blaadje. (1 punt)

3. We definiëren

$$f_3(n) = \text{het Gödel-getal van het rijtje } \langle 0, 1, 2, \ldots, n \rangle$$

   (a) Laat zien dat f_3 primitief recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn. (1 punt)

   (*Hint:* je kunt deze functie definiëren met gebruik van begrensde operatoren.)

   (b) Leg uit waarom een definitie van f_3 in termen van gn_n geen correct antwoord op opgave 3a oplevert. (1 punt)

4. (a) Is iedere totale μ-recursieve functie primitief recursief? Je hoeft je antwoord niet te verklaren. ($\frac{1}{2}$ punt)

   (b) Is iedere primitief recursieve functie totaal en μ-recursief? Je hoeft je antwoord niet te verklaren. ($\frac{1}{2}$ punt)

Primitief recursieve functies

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x\\
z(x) &= 0\\
s(x) &= x+1\\
p_i^{(k)}(x_1,\dots,x_k) &= x_i\\
c_n^{(k)}(x_1,\dots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1\\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y\\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y\\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y\\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y\\
\mathsf{fact}(x) &= x!\\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1\\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0\\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x\\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal}\\
&\quad\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0,\dots,x_n) &= \mathsf{pn}(0)^{x_0+1}\mathsf{pn}(1)^{x_1+1}\cdots\mathsf{pn}(n)^{x_n+1} = \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0,\dots,x_n\rangle\\
\mathsf{dec}(i,x) &= i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\\
\mathsf{gdn}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ het Gödel-getal is van een rijtje}\\ 0 & \text{als } x \text{ geen Gödel-getal is}\end{cases}\\
\mathsf{gdln}(x) &= \begin{cases} n & \text{als } x \text{ het Gödel-getal is van een rijtje met lengte } n\\ 0 & \text{als } x \text{ geen Gödel-getal is}\end{cases}
\end{aligned}
$$