Berekenbaarheid 2018
Uitwerkingen Toets 2
19 oktober 2018

1. (a) Geef numerieke functies f_1 en f_2 zodat de compositie $f_1 \circ (f_2, f_2)$ totaal is, maar de compositie $f_2 \circ (f_1, f_1, f_1)$ niet totaal is. (1 punt)

   (*Hint:* het is waarschijnlijk handig om eerst opgave 1b te maken, voor je aan 1a begint.)

   Als f_2 niet totaal zou zijn, was de compositie $f_1 \circ (f_2, f_2)$ ook niet totaal (want compositie is strict), dus f_2 moet totaal zijn. Maar omdat $f_2 \circ (f_1, f_1, f_1)$ niet totaal is, moet f_1 dus niet totaal zijn.

   We zorgen ervoor dat f_1 overal gedefinieerd is, behalve voor $f_1(0,0)$. Als we dan er ook voor zorgen dat f_2 nooit 0 oplevert, hebben we wat we willen. Dus een oplossing van de opgave is:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \begin{cases} \uparrow & \text{als } x = y = 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \\ f_2(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

   (b) Geef de ariteiten van de vier functies f_1, f_2, $f_1 \circ (f_2, f_2)$ en $f_2 \circ (f_1, f_1, f_1)$. (1 punt)

   Respectievelijk: 2, 3, 3, 2.

   De ariteit van de linkerkant van een compositie is het aantal functies aan de rechterkant, en de ariteit van een compositie is de ariteit van de functies aan de rechterkant.

2. We kunnen de Fibonacci-functie fib als volgt definiëren. Eerst definiëren we een functie f met primitieve recursie:

$$\begin{aligned} f(0) &= 18 \\ f(y+1) &= \mathsf{gn}_1\big(\mathsf{dec}(1, f(y)), \mathsf{dec}(0, f(y)) + \mathsf{dec}(1, f(y))\big) \end{aligned}$$

   Vervolgens definiëren we hieruit:

$$\mathsf{fib}(x) := \mathsf{dec}(0, f(x))$$

   (a) Waarom is $f(0)$ gedefinieerd als 18? (1 punt)

   De definities zitten zo in elkaar dat:

$$f(x) = \mathsf{gn}_1\big(\mathsf{fib}(x), \mathsf{fib}(x+1)\big)$$

   Dus $f(0)$ moet het Gödel-getal van de eerste twee Fibonacci-getallen 0 en 1 zijn:

$$f(0) = \mathsf{gn}_1(0, 1) = 2^{0+1}3^{1+1} = 2^1 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

(b) Schrijf $f = \textbf{primrec}(g, h)$ en geef g en h als compositie van functies uit het lijstje op de achterkant van dit blaadje. (2 punten)

We hebben:

$$g() = 18$$
$$h(y, w) = \mathsf{gn}_1\big(\mathsf{dec}(1, w), \mathsf{dec}(0, w) + \mathsf{dec}(1, w)\big)$$

Deze functies als compositie geschreven:

$$g = c_{18}^{(0)}$$
$$h = \mathsf{gn}_1 \circ (\mathsf{dec} \circ (c_1^{(2)}, p_2^{(2)}), \mathsf{add} \circ (\mathsf{dec} \circ (c_0^{(2)}, p_2^{(2)}), \mathsf{dec} \circ (c_1^{(2)}, p_2^{(2)})))$$

(c) Schrijf fib als compositie van f en functies op de achterkant van dit blaadje. (1 punt)

$$\mathsf{fib} = \mathsf{dec} \circ (z, f)$$

3. We definiëren

$$f_3(n) = \text{het Gödel-getal van het rijtje } \langle 0, 1, 2, \ldots, n\rangle$$

(a) Laat zien dat f_3 primitief recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn. (1 punten)

(*Hint:* je kunt deze functie definiëren met gebruik van begrensde operatoren.)

Dit volgt uit het feit dat f_3 te definiëren is door:

$$f_3(n) = \Pi_{i=0}^{n} \, \mathsf{pn}(i)^{i+1}$$

(b) Leg uit waarom een definitie van f_3 in termen van gn_n geen correct antwoord op opgave 3a oplevert. (1 punten)

Als je dat doet wil je eigenlijk laten zien dat f_3 een compositie is van primitief recursieve functies. Maar omdat het subscript n in gn_n geen argument van de functie is, heb je in dat geval slechts een eindig aantal *specifieke* gn_n, en krijg je dus geen rijtjes van willekeurig grote lengte. Dus dat werkt niet.

In het bijzonder volgt dus niet uit het feit dat geldt dat

$$f_3(n) = \mathsf{gn}_n(0, \ldots, n)$$

dat f_3 primitief recursief is, omdat gn_n geen specifieke functie is maar voor iedere n verschillend.

4. (a) Is iedere totale μ-recursieve functie primitief recursief? Je hoeft je antwoord niet te verklaren. ($\frac{1}{2}$ punt)

   Nee.

   We hebben het niet bewezen, maar de Ackermann-functie is wel totaal en μ-recursief, maar niet primitief recursief.

   (b) Is iedere primitief recursieve functie totaal en μ-recursief? Je hoeft je antwoord niet te verklaren. ($\frac{1}{2}$ punt)

   Ja.

   De constructies waarmee je een primitief recursieve functie kunt construeren (basisfuncties, compositie, primitieve recursie) leveren altijd een totale functie op, dus alle primitief recursieve functies zijn totaal. En ieder van deze drie constructies is ook één van de vier constructies waarmee je een μ-recursieve functie kunt construeren, dus iedere primitief recursieve functie is ook μ-recursief.