Type Theory exercises

For the course notes see `http://www.cs.kun.nl/~herman/TT`

Exercises 6: Dependent Type Theory

Consider the “signature” (context) of first order pedicate logic in λP Σ_{PRED}:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{prop} & : & \mathbf{type}, \\
\Rightarrow & : & \mathsf{prop}{\to}\mathsf{prop}{\to}\mathsf{prop}, \\
\mathsf{T} & : & \mathsf{prop}{\to}\mathbf{type}, \\
\mathsf{A} & : & \mathbf{type}, \\
\mathsf{R} & : & \mathsf{A}{\to}\mathsf{A}{\to}\mathsf{prop}, \\
\mathsf{f} & : & \mathsf{A}{\to}\mathsf{A}, \\
\mathsf{a} & : & \mathsf{A}, \\
\mathsf{imp\_intr} & : & \Pi p, q : \mathsf{prop}.(\mathsf{T}p{\to}\mathsf{T}q){\to}\mathsf{T}(p \Rightarrow q), \\
\mathsf{imp\_el} & : & \Pi p, q : \mathsf{prop}.\mathsf{T}(p \Rightarrow q){\to}\mathsf{T}p{\to}\mathsf{T}q, \\
\forall & : & (\mathsf{A}{\to}\mathsf{prop}){\to}\mathsf{prop}, \\
\forall\mathsf{\_intr} & : & \Pi P{:}\mathsf{A}{\to}\mathsf{prop}.(\Pi x{:}\mathsf{A}.\mathsf{T}(Px)){\to}\mathsf{T}(\forall P), \\
\forall\mathsf{\_elim} & : & \Pi P{:}\mathsf{A}{\to}\mathsf{prop}.\mathsf{T}(\forall P){\to}\Pi x{:}\mathsf{A}.\mathsf{T}(Px).
\end{array}
$$

1. Give a term of the type $\mathsf{T}(\forall(\lambda x{:}A.(R\,x\,a \Rightarrow R\,a\,(f\,x)))){\to}\mathsf{T}(R\,a\,a \Rightarrow R\,a\,(f\,a))$ in the context Σ_{PRED}.
2. Give a precise derivation of the correctness of the context

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{prop} & : & \mathbf{type}, \\
\Rightarrow & : & \mathsf{prop}{\to}\mathsf{prop}{\to}\mathsf{prop}, \\
\mathsf{T} & : & \mathsf{prop}{\to}\mathbf{type}, \\
\mathsf{imp\_intr} & : & \Pi p, q : \mathsf{prop}.(\mathsf{T}p{\to}\mathsf{T}q){\to}\mathsf{T}(p \Rightarrow q)
\end{array}
$$

   See the typing rules for λP on the slides.
3. Give a precise derivation of

   $X : \mathbf{type}, P : X{\to}\mathbf{type}, x : X, Q : (P\,x){\to}\mathbf{type} \vdash \lambda h{:}(P\,x).\lambda y{:}(Q\,h).y : \Pi h{:}(P\,x).(Q\,h){\to}(Q\,h).$