RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN

Faculteit NWI

Tentamen **Reflectie, HC001**, maandag 23 januari 17.30 – 19.30.

Het aantal punten dat je maximaal voor iedere opgave kunt behalen staat vermeld (totaal 100 punten, exclusief de bonus opgave 5).
Als P je puntentotaal is, dan wordt je tentamencijfer bepaald door

$$\min(10, \frac{P}{10}).$$

Je mag papieren aantekeningen bij je hebben (het dictaat, de opgaven, uitwerkingen van de opgaven, je eigen aantekeningen, de geprinte slides, ...), **maar geen laptop, telefoon e.d.**

---

1. Beschouw over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ de reguliere expressies

$$(b^*a)^*a$$
$$b(b^*a)^*a$$

en hun talen L_1 en L_2, respectievelijk.

(20) (a) Geef woorden w_1, w_2, w_3 en w_4 waarvoor geldt

$$\begin{array}{ll} w_1 \in L_1 & w_1 \in L_2 \\ w_2 \notin L_1 & w_2 \in L_2 \\ w_3 \in L_1 & w_3 \notin L_2 \\ w_4 \notin L_1 & w_4 \notin L_2 \end{array}$$

Motiveer je antwoorden.

Solution: De woorden van L_1 en L_2 zijn van de volgende vormen, respectievelijk

$$\begin{array}{lcl} L_1 & : & (b\ldots ba)\ldots(b\ldots ba)a \\ L_2 & : & b(b\ldots ba)\ldots(b\ldots ba)a \end{array}$$

waarbij de ... ook "leeg" mogen zijn.

- *bbaa* of *baa*. Voor $baa \in L_1$: 1 keer $(b\ldots ba)$ levert ba en dan nog de a op het eind. Voor $baa \in L_2$: eerst een b en dan 1 keer $(b\ldots ba)$ levert a en dan nog de a op het eind.
- *ba*. Voor $ba \notin L_1$: De b moet komen uit 1 keer $(b\ldots ba)$, maar dan komt er ook altijd 1 a bij. Maar dan is er nog de a op het eind en heb ik *baa* en niet *ba*. Voor $ba \in L_2$: eerst een b en dan 0 keer $(b\ldots ba)$ en dan nog de a op het eind.

- a of aa. Voor $a \in L_1$: 0 keer $(b \dots ba)$ en dan nog de a op het eind. Voor $a \notin L_2$: ieder woord in L_2 begint met b.
- b of ab. Voor $ab \notin L_1$, $ab \notin L_2$: ieder woord in L_1 of $L-2$ eindigt met a.

(15) (b) Geef een contextvrije grammatica die de taal L_2 genereert.

Solution:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & bCa \\ C & \to & CBa \mid \epsilon \\ B & \to & Bb \mid \epsilon \end{array}$$

(10) 2. (a) Geef een term M uit de combinatorische logica waarvoor geldt

$$M\,x = \mathbf{S}\,(\mathbf{K}\,x)\,\mathbf{I}.$$

Motiveer je antwoord.

Solution:

$$\begin{array}{rcl} M & = & [x](\mathbf{S}\,(\mathbf{K}\,x)\,\mathbf{I}) \\ & = & \mathbf{S}([x](\mathbf{S}\,(\mathbf{K}\,x)))([x]\mathbf{I}) \\ & = & \mathbf{S}(\mathbf{S}([x]\mathbf{S})([x](\mathbf{K}\,x)))(\mathbf{KI}) \\ & = & \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}([x]\mathbf{K})([x]x)))(\mathbf{KI}) \\ & = & \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})\mathbf{I}))(\mathbf{KI}) \end{array}$$

(10) (b) Geef een λ-term P waarvoor geldt

$$P\,x = \lambda y.x\,P\,y\,P.$$

Motiveer je antwoord.

Solution:

$$\begin{array}{rcl} P\,x = \lambda y.x\,P\,y\,P & \Leftarrow & P = \lambda x\,y.x\,P\,y\,P \\ & \Leftarrow & P = (\lambda p\,x\,y.x\,p\,y\,p)P \\ & \Leftarrow & P = H\,P \text{ met } H := \lambda p\,x\,y.x\,p\,y\,p \\ & \Leftarrow & P = Y\,H \text{ met } Y \text{ Curry's fixed-point combinator} \end{array}$$

Ook goed is om voor P 'een fixed-point van H' te nemen.
Als deze uitwerking erbij staat is datvoldoende motivatie; als er alleen staat

$$P = Y\,H \text{ met } Y \text{ Curry's fixed-point combinator,}$$

Dan moet er een 'berekening' bij die laat zien dat deze P voldoet.

3. Definieer de taal van *binaire* bomen:

$$\mathsf{tree} := \mathsf{l} \mid \mathsf{j}(\mathsf{tree}, \mathsf{tree}).$$

We definiëren de volgende functie op bomen:

$$\begin{aligned} h(\mathsf{l}) &= \mathsf{l} \\ h(\mathsf{j}(t_1, t_2)) &= \mathsf{j}(h(t_1), \mathsf{j}(h(t_1), h(t_2))) \end{aligned}$$

(10) (a) Teken de bomen $b_1 := \mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{l})$ en $b_2 := \mathsf{j}(\mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{l}), \mathsf{l})$ en hun beeld onder h: $h(b_1)$ en $h(b_2)$.

Solution: $h(b_1) = \mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{l}))$, $h(b_2) = \mathsf{j}(\mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{l})), \mathsf{j}(\mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{j}(\mathsf{l}, \mathsf{l})), \mathsf{l}))$. Tekening: zelf doen (triviaal).

(10) (b) Geef de Böhm-Berarducci code ($\ulcorner t \urcorner$) voor de bomen b_2 en $h(b_2)$ uit onderdeel (a).

Solution: $\ulcorner b_2 \urcorner = \lambda l\, j.j(j(l, l), l)$. $\ulcorner h(b_2) \urcorner = \lambda l\, j.j(j(l, j(l, l)), j(j(l, j(l, l)), l))$. De l en j omgewisseld is ook goed: $\ulcorner b_2 \urcorner = \lambda j\, l.j(j(l, l), l)$ etc.

(15) (c) Construeer een λ-term H die h λ-definieert op de Böhm-Berarducci codes voor bomen. (Dus een H met de eigenschap $H \ulcorner t \urcorner = \ulcorner h(t) \urcorner$.) Laat zien dat $H \ulcorner b_2 \urcorner = \ulcorner h(b_2) \urcorner$

Solution: $H := \lambda t.\lambda l\, j.t\, l(\lambda x\, y.j\, x(j\, x\, y))$. Kort af: $g := \lambda x\, y.j\, x(j\, x\, y)$.

$$\begin{aligned} H \ulcorner b_2 \urcorner &= \lambda l\, j.b_2\, l g \\ &= \lambda l\, j.g\, (g\, l\, l) l \\ &= \lambda l\, j.j\, (g\, l\, l)(j\, (g\, l\, l)\, l) \\ &= \lambda l\, j.j\, (j\, l\, (j\, l\, l))(j\, (j\, l\, (j\, l\, l))\, l) \\ &= \ulcorner h(b_2) \urcorner \end{aligned}$$

(10) 4. Laat zien dat er geen λ-term F is waarvoor geldt

$$F\, M \;=\; \mathbf{c}_n \text{ als } n \text{ het aantal } \lambda\text{'s in } M \text{ is.}$$

Hint: je mag gebruik maken van het feit dat er termen P en Q zijn waarvoor geldt $P \neq Q$, in het bijzonder dat $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$.

Solution: Stel er is wel zo'n F. Dan

$$\mathbf{c}_0 = F\, x = F(\mathbf{I}\, x) = \mathbf{c}_1$$

Maar dan (NB $\mathbf{c}_1 = \lambda f\, x.f x$, $\mathbf{c}_0 = \lambda f\, x.x$)

$$\mathbf{I} = \mathbf{c}_0\, (\lambda z.\mathbf{K})\, \mathbf{I} = \mathbf{c}_1\, (\lambda z.\mathbf{K})\, \mathbf{I} = (\lambda z.\mathbf{K})\, \mathbf{I} = \mathbf{K},$$

tegenspraak. Dus zo'n F bestaat niet.

(10) 5. **BONUS OPGAVE** Laat van de volgende functie $f : \Lambda \to \mathbb{N}$ zien dat hij λ-definieerbaar is (voor de Böhm-Piperno-Guerrini codering $M \mapsto \ulcorner M \urcorner$):

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ f(P\,Q) & = & f(P) + f(Q) \\ f(\lambda x.P) & = & f(P) + 1 \end{array}$$

(Hierbij mag je ervan uitgaan dat de optelling λ-definieerbaar is d.m.v. de term A_+.)

Solution: Je moet een λ-term F geven die het aantal λ's in een gecodeerde λ-term telt voor de Böhm-Piperno-Guerrini codering. Er moet voor F dus gelden:

$$\begin{array}{rcl} F\ulcorner x \urcorner & = & \mathbf{c}_0 \\ F\ulcorner P\,Q \urcorner & = & \mathsf{A}_+(F\ulcorner P \urcorner)(F\ulcorner Q \urcorner) \\ F\ulcorner \lambda x.P \urcorner & = & \mathsf{A}_+(F\ulcorner P \urcorner)\mathbf{c}_1. \end{array}$$

waarbij de codering $M \rightsquigarrow \ulcorner M \urcorner$ de volgende is

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner x \urcorner & := & \mathtt{Var}\; x \\ \ulcorner MN \urcorner & := & \mathtt{App}\ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner \\ \ulcorner \lambda x.M \urcorner & := & \mathtt{Abs}\,(\lambda x.\ulcorner M \urcorner) \end{array}$$

We weten (recursie stelling) dat voor iedere A_1, A_2, A_3 er een F is waarvoor geldt

$$\begin{array}{rcl} F(\mathtt{Var}\, x) & = & A_1\, x\, F \\ F(\mathtt{App}\, x\, y) & = & A_2\, x\, y\, F \\ F(\mathtt{Abs}\, x) & = & A_3\, x\, F \end{array}$$

Dus als we nemen $A_1 := \lambda x\, h.\mathbf{c}_0$, $A_2 := \lambda x\, y\, h.\mathsf{A}_+(h\, x)(h\, y)$ en $A_3 := \lambda x\, h.\mathsf{A}_+(h(x\, z))\mathbf{c}_1$. waarbij z een verse variabele is, dan krijgen we een F waarvoor geldt

$$\begin{array}{rclcl} F\ulcorner x \urcorner & = & F(\mathtt{Var}\, x) & = & \mathbf{c}_0 \\ F\ulcorner P\,Q \urcorner & = & F(\mathtt{App}\, \ulcorner P \urcorner \ulcorner Q \urcorner) & = & \mathsf{A}_+(F\ulcorner P \urcorner)(F\ulcorner Q \urcorner) \\ F\ulcorner \lambda y.P \urcorner & = & F(\mathtt{Abs}\,(\lambda y.\ulcorner P \urcorner)) & = & \mathsf{A}_+(F((\lambda y.\ulcorner P \urcorner)z))\mathbf{c}_1 \\ & = & \mathsf{A}_+(F(\ulcorner P \urcorner[y := z]))\mathbf{c}_1 & = & \mathsf{A}_+(F(\ulcorner P \urcorner))\mathbf{c}_1. \end{array}$$

EINDE